

تخمین پارامترهای مدل اوتورگرسیو دوبعدی در حضور نویز سفید

علیمراد محمودی^۱

^۱استادیار دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده مهندسی، گروه برق، a.mahmoudi@scu.ac.ir

چکیده - در این مقاله، روشی جهت تخمین پارامترهای مدل اوتورگرسیو دوبعدی در حضور نویز ارایه می شود. این روش براساس بهبود حداقل مربعات خطا با ترکیب جدید معادلات یول-واکر مرتبه پایین و مرتبه بالا است. تخمین اولیه در این روش دارای بایاس می باشد. روش جدیدی جهت تخمین واریانس نویز برای حذف بایاس از ضرایب ارایه شد. با شبیه سازی کامپیوتری مقاوم بودن الگوریتم پیشنهادی در مقابل نویز مشاهده، نشان داده شده است. کلید واژه- مدل اوتورگرسیو دوبعدی، معادلات یول واکر، روش حداقل مربعات.

مشاهده رنگی فرض می شود. تعمیمی از روش Zheng در حالت برداری در مرجع [۱۱] آمده است.

۱-مقدمه

در AR دو بعدی کارهای کمی انجام شده است. در مقاله [۱۲] مساله AR دو بعدی در حضور نویز در نظر گرفته شده است. در این مقاله با ترکیب معادلات یول-واکر و معادلات آماری مرتبه بالا پارامترهای مدل تخمین زده می شود. این روش فرض کرده که AR دو بعدی غیرگوسی می باشد این امر موجب محدود شدن این الگوریتم شده است. در مقاله [۱۳] روشی مبتنی بر تابع خود همبستگی برای مدل AR دو بعدی ارایه شده ولی اثر نویز مشاهده در نظر گرفته نشده است.

الگوریتم پیشنهادی در این مقاله مبتنی بر ترکیب معادلات یول-واکر مرتبه پایین و مرتبه بالا می باشد. در این الگوریتم بصورت بازگشتی پارامترهای سیگنال و نویز تخمین زده می شود. این ایده در حالت یک بعدی نیز در مقاله [۱۰] بکار رفته است.

برای بررسی عملکرد الگوریتم، شبیه سازی انجام شد و روش پیشنهادی با روش Least-Squares (LS) مقایسه شد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد الگوریتم پیشنهادی در سیگنال به نویز کم بخوبی قادر به تخمین پارامترها می باشد.

۲-ارایه مساله

یک مدل AR دو بعدی با مرتبه (p_1, p_2) در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a(i, j)x(m-i, n-j) = e(m, n) \quad (1)$$

در این مدل $a(0,0)=1$ و $x(m,n)$ خروجی مدل و $e(m,n)$ نویز ورودی مدل AR می باشد که ایستا سفید با واریانس σ_e^2 در

مدل اوتورگرسیو (AR) دو بعدی کاربرد زیادی در پردازش تصویر، پردازش سیگنال، رادار و مخابرات دارد. این مدل می تواند در مدلسازی تصویر [۱] و تجزیه و تحلیل بافت [۲] در پردازش تصویر بکار گرفته شود. در پردازش سیگنال می توان به کمک این مدل طیف سیگنالهای دوبعدی را با رزولوشن بالا تخمین زد [۳]. در رادار جهت پردازش فضا و زمان، تخمین و آشکارسازی سیگنالهای راداری بکار رفته است [۴-۶]. در مخابرات جهت تخمین کانال مخابراتی بکار گرفته می شود [۷]. در کاربردهای مختلف نویز مشاهده نیز به این مدل اضافه می شود. این امر باعث می شود که روشهای مرسوم جهت تخمین مدل AR نویزی دارای بایاس و خطا شوند و در عمل این روشها کارایی خود را از دست می دهند.

در حالت AR یک بعدی تحقیقات وسیعی جهت حذف بایاس از روشهای مرسوم تخمین پارامترهای AR یک بعدی در حضور نویز انجام گرفته است [۸-۱۱]. روشهایی که توسط Zheng ارایه شد مبتنی بر حذف بایاس از تخمین LS بوده است در این روشها ابتدا به کمک روش LS پارامترها تخمین زده می شود سپس با استفاده از معادلات کمکی دیگر نویز مشاهده تخمین زده می شود و در نهایت بایاس از ضرایب مدل حذف می شود [۸]. دسته دیگر از روشهای تخمین AR نویزی مبتنی بر معادلات یول-واکر می باشند در مرجع [۹] با ترکیب معادلات یول-واکر و حل آنها بصورت یک مساله مقدار ویژه پارامترها تخمین زده می شود. روش دیگری که در مرجع [۱۰] ارایه شده است از ترکیب معادلات LS و یول-واکر استفاده می کند. در این مرجع نویز

نظر گرفته می شود. سیگنال مشاهده بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$y(m, n) = x(m, n) + w(m, n) \quad (2)$$

که در آن نویز مشاهده $w(m, n)$ ایستا سفید با واریانس σ_w^2 است. در این مقاله فرضهای زیر در نظر گرفته می شود:

۱- فرایندهای $w(m, n)$ و $e(m, n)$ ناهمبسته می باشند. داریم:

$$E\{w(m, n)e(m, n)\} = 0 \quad (3)$$

۲- مرتبه مدل (p_1, p_2) معلوم فرض می شود. روشهای تخمین مرتبه AR دو بعدی در مرجع [۱۴] آمده است.

۳- مدل پایدار و علی در نظر گرفته می شود.

هدف اصلی این مقاله تخمین پارامترهای مدل $a(i, j)$ $i=0, \dots, p_1, j=0, \dots, p_2, (i, j) \neq (0, 0)$ از روی مشاهدات $y(m, n)$ $(m=1, \dots, M, j=1, \dots, N)$ میباشد.

۱-۱- معادلات یول واکر

معادلات یول-واکر بصورت زیر می باشند [۱۵]:

$$\sum_{i=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} a(i, j) r_x(k-i, l-j) = r_x(k, l) + \sigma_e^2 \delta(k, l) \quad k \geq 0, l \geq 0, (i, j) \neq (0, 0) \quad (4)$$

که در آن $r_x(k, l) = E\{x(m, n)x(m-k, n-l)\}$ تابع خود همبستگی دوبعدی فرایند $x(m, n)$ می باشد. با توجه به فرض ۱ تابع خودهمبستگی فرایند مشاهده بصورت زیر می باشد:

$$r_y(k, l) = \begin{cases} r_x(k, l) + \sigma_w^2 & (k, l) = (0, 0) \\ r_x(k, l) & (k, l) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (5)$$

معادلات یول-واکر مرتبه پایین بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\bar{\mathbf{R}}_y \bar{\mathbf{a}} = \sigma_w^2 \bar{\mathbf{a}} + \sigma_e^2 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p_1} \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(0) & \mathbf{R}_y(-1) & \dots & \mathbf{R}_y(-p_1) \\ \mathbf{R}_y(1) & \mathbf{R}_y(0) & \dots & \mathbf{R}_y(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_y(p_1) & \mathbf{R}_y(p_1-1) & \dots & \mathbf{R}_y(0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{R}(i) = \begin{bmatrix} r(i, 0) & r(i, -1) & \dots & r(i, -p) \\ r(i, 1) & r(i, 0) & \dots & r(i, -p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(i, p) & r(i, p-1) & \dots & r(i, 0) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a(i, 0) \\ a(i, 1) \\ \vdots \\ a(i, p_2) \end{bmatrix}$$

اگر سطر اول معادلات حذف شود و معادلات بازنویسی شود:

$$\mathbf{R}_y \mathbf{a} - \sigma_w^2 \mathbf{a} = \mathbf{r}_y \quad (9)$$

که \mathbf{R}_y ماتریس با ابعاد $(p_1 p_2 + p_1 + p_2) \times (p_1 p_2 + p_1 + p_2)$ ، \mathbf{r}_y و \mathbf{a} بردارهای $1 \times (p_1 p_2 + p_1 + p_2)$ می باشند. توجه شود که همان $\bar{\mathbf{a}}$ بدون $a(0, 0)$ می باشد.

معادلات یول-واکر مرتبه بالا از رابطه (۱) بصورت زیر می باشد:

$$\bar{\mathbf{R}}_q \bar{\mathbf{a}} = 0 \quad (10)$$

که در آن

$$\bar{\mathbf{R}}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(p_1+1) & \mathbf{R}_y(p_1) & \dots & \mathbf{R}_y(1) \\ \mathbf{R}_y(p_1+2) & \mathbf{R}_y(p_1+1) & \dots & \mathbf{R}_y(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_y(p_1+q) & \mathbf{R}_y(p_1+q-1) & \dots & \mathbf{R}_y(q) \end{bmatrix} \quad (11)$$

معادله (۱۰) نیز بر حسب \mathbf{a} بازنویسی می شود:

$$\mathbf{R}_q \mathbf{a} = \mathbf{r}_q \quad (12)$$

ماتریس \mathbf{R}_q دارای ابعاد $(qp_2 + q + p_2) \times (p_1 p_2 + p_1 + p_2)$ می باشد و بردار \mathbf{r}_q $1 \times (qp_2 + q + p_2)$ می باشد.

۳- روش پیشنهادی

معادلات یول-واکر مرتبه پایین (۹) و معادلات یول-واکر مرتبه بالا (۱۰) بصورت زیر ترکیب می شوند:

$$\mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{h} + \sigma_w^2 \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (13)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y \\ \mathbf{R}_q \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_q \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_q \end{bmatrix} \quad (14)$$

که $p = (p_1 p_2 + p_1 + p_2)$ می باشد.

دو طرف رابطه (۱۳) در $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ ضرب می شود داریم:

۴- i به $i+1$ تغییر داده می شود و محاسبات زیر انجام می شود:

$$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{\mathbf{R}}_y \hat{\mathbf{R}}_H - \mathbf{I}_p) \hat{\mathbf{a}}^{(i-1)} \quad (26)$$

$$\hat{\sigma}_w^{2(i)} = \frac{\hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{g}}}{\|\hat{\mathbf{S}}\|^2} \quad (27)$$

۵- حذف بایاس به کمک رابطه زیر انجام می شود:

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)} = \hat{\mathbf{a}}_H + \hat{\sigma}_w^{2(i)} \hat{\mathbf{R}}_H \hat{\mathbf{a}}^{(i-1)} \quad (28)$$

۶- اگر

$$\frac{\|\hat{\mathbf{a}}^{(i)} - \hat{\mathbf{a}}^{(i-1)}\|}{\|\hat{\mathbf{a}}^{(i)}\|} \leq \delta \quad (29)$$

بر قرار باشد الگوریتم پایان می پذیرد در غیر اینصورت الگوریتم به مرحله ۳ می رود و تکرار می شود. پارامتر δ مثبت و کوچک می باشد. همگرایی این نوع الگوریتم ها در مرجع [۱۰] بررسی شده است.

۴- شبیه سازی

در این بخش به کمک شبیه سازی الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم LS مقایسه می شود.

یک مدل AR دو بعدی نویری مرتبه (۲,۲) بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} x(m, n) &= a(0,1)x(m, n-1) + a(0,2)x(m, n-2) + \\ &+ a(1,0)x(m-1, n) + a(1,1)x(m-1, n-1) + \\ &+ a(1,2)x(m-1, n-2) + a(2,0)x(m-2, n) \\ &+ a(2,1)x(m-2, n-1) + a(2,2) * x(m-2, n-2) + e(m, n) \\ y(m, n) &= x(m, n) + w(m, n) \end{aligned} \quad (30)$$

در این مدل فرایندهای $e(m, n), w(m, n)$ نویزهای سفید گوسی و مستقل می باشند. نسبت سیگنال به نویز بصورت زیر تعریف می شود:

$$SNR = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \quad (31)$$

که σ_x^2 واریانس سیگنال $x(m, n)$ می باشد. برای بررسی عملکرد الگوریتم، شبیه سازی مونت کارلو انجام می شود و الگوریتم ها با معیار RMSE که بصورت زیر تعریف می شود مقایسه می شوند:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_H + \sigma_w^2 \mathbf{R}_H \mathbf{a} \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_H = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{h} \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_H = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{B} \quad (17)$$

\mathbf{a}_H حل LS معادلات (۱۴) در غیاب نویز می باشد. واریانس

نویز باعث ایجاد بایاس در حل LS می شود. با تخمین مقدار بایاس $\sigma_w^2 \mathbf{R}_H \mathbf{a}$ و اضافه کردن آن به \mathbf{a}_H می توان به یک

تخمین بدون بایاس دست یافت. در ادامه روشی جهت تخمین واریانس نویز مشاهده ارایه می شود.

معادله (۱۵) در \mathbf{R}_y ضرب می شود داریم:

$$\mathbf{r}_y + \sigma_w^2 \mathbf{I}_p \mathbf{a} = \mathbf{R}_y \mathbf{a}_H + \sigma_w^2 \mathbf{R}_y \mathbf{R}_H \mathbf{a} \quad (18)$$

معادله (۱۸) بر حسب σ_w^2 بازنویسی می شود:

$$\sigma_w^2 \mathbf{S} = \mathbf{g} \quad (19)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{R}_y \mathbf{R}_H - \mathbf{I}_p) \mathbf{a} \quad (20)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{r}_y - \mathbf{R}_y \mathbf{a}_H \quad (21)$$

واضح است که تخمین LS σ_w^2 بصورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_w^2 = \frac{\mathbf{S}^T \mathbf{g}}{\|\mathbf{S}\|^2} \quad (22)$$

$\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی می باشد.

در ادامه مراحل الگوریتم پیشنهادی آمده است.

۱- ابتدا مقادیر تابع خود همبستگی از روی مشاهدات بصورت زیر تخمین زده می شود:

$$\hat{r}(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m,n} y(m, n) y(m-k, n-l) \quad (23)$$

$$\hat{r}(k, l) = \hat{r}(-k, -l)$$

$$\hat{r}(k, -l) = \hat{r}(-k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m,n} y(m, n) y(m+k, n-l)$$

۲- با استفاده از تخمین های تابع خود همبستگی ماتریسهای

$$\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{R}}_q, \hat{\mathbf{R}}_H, \hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{r}}_y, \hat{\mathbf{R}}_y$$

۳- مقدار مرحله تکرار $i=0$ انتخاب می شود و مقدار اولیه ضرایب بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\hat{\mathbf{a}}^{(0)} = \hat{\mathbf{a}}_H = (\hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{H}})^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{h}} \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{r}}_y - \hat{\mathbf{R}}_y \hat{\mathbf{a}}_H \quad (25)$$

جدول ۱. نتایج شبیه سازی ($I=100, N=128, SNR=5$ dB)

مقدار واقعی ضرایب	روش LS میانگین مقادیر تخمین	روش LS انحراف معیار استاندارد	روش پیشنهادی میانگین مقادیر تخمین	روش پیشنهادی انحراف معیار استاندارد
$a(0,1) = 0.3$	0.2223	0.0038	0.3069	0.0169
$a(0,2) = 0.2$	0.1597	0.0037	0.1991	0.0049
$a(1,0) = 0.3$	0.2221	0.0047	0.3071	0.0185
$a(1,1) = -0.09$	-0.033	0.003	-0.0927	0.0136
$a(1,2) = -0.06$	-0.0278	0.004	-0.0614	0.0086
$a(2,0) = 0.2$	0.1599	0.0053	0.1986	0.0068
$a(2,1) = -0.06$	-0.0253	0.0058	-0.0587	0.0088
$a(2,2) = -0.04$	0.0233	0.0033	-0.0413	0.0057
RMSE(%)	28/245		2/588	

۶-مراجع

- [1] X. Zheng, and X. Wu, "Image interpolation by Adaptive 2-D Autoregressive Modeling and Soft-Decision Estimation," IEEE Transactions on Image Processing, vol. 17, no. 6, pp. 887 – 896, 2008.
- [2] S. Oe, "Texture segmentation method using two-dimensional AR model and Kullback information," Pattern Recognition, vol. 26, no.12, pp. 237-244, 1993.
- [3] R. R. Hansen, R. Chellappa, "Noncausal 2-D spectrum estimation for direction finding," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 36, no. 1 pp. 108-125, 1990.
- [4] Y. I. Abramovich, etc. , "Performance of 2-D mixed autoregressive models for airborne radar STAP: KASSPER-aided analysis," Radar Conference, pp. 1-5, 2008.
- [5] S. M. Kay, "Broad-band detection based on two-dimensional mixed autoregressive models," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41 no. 7, pp. 2413-2428, 1993.
- [6] S. M. Kay, and S. B. Doyle, "Rapid estimation of the range-Doppler scattering function," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 51, no. 1 , pp. 255-268, 2003.
- [7] D., Umansky, M. Patzold, "A two-dimensional autoregressive model for MIMO wideband mobile radio channels," IEEE GLOBECOM, pp. 1-6, 2008.
- [8] W. X. Zheng, "Autoregressive parameter estimation from noisy data," IEEE Trans. Circuits Systems II: Analog Digital Signal Processing, vol. 47, no.1, pp. 71-75, 2000.
- [9] C. E. Davila, "A subspace approach to estimation of autoregressive parameters from noisy

$$RMSE = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^I \|\hat{a}_i - a\|^2}}{\|a\|} \quad (32)$$

\hat{a}_i تخمین ضرایب در مرحله i ام و I تعداد مراحل اجرای الگوریتم می باشد. در روش پیشنهادی پارامتر q برابر ۲ می باشد. الگوریتم پیشنهادی با روش LS مقایسه شده و نتایج در جدول ۱ آمده است. همانطور که دیده می شود روش پیشنهادی دارای عملکرد بهتری نسبت به روش LS می باشد.

۵-نتیجه گیری

یک روش جهت تخمین پارامترهای مدل AR دو بعدی در حضور نویز ارایه شد. در این روش معادلات یول واکر مرتبه پایین و مرتبه بالا ترکیب و سپس با استفاده از روش LS بهبود یافته بفرم بازگشتی بایاس از ضرایب حذف می شود. شبیه سازی نشان می دهد الگوریتم پیشنهادی دارای عملکرد بهتری نسبت به روش LS می باشد. نکته ای که باید به آن توجه کرد اینست که بار محاسباتی الگوریتم پیشنهادی از روش LS بیشتر است و افزایش N باعث بهبود تخمین مقادیر خود همبستگی در روش پیشنهادی و در نتیجه بهبود عملکرد الگوریتم خواهد شد.

- measurements,” IEEE Trans. Signal processing, vol. 46, no. 2, pp. 531-534, 1998.
- [10] A. Mahmoudi and M. Karimi, “Parameter estimation of autoregressive signals from observations corrupted with colored noise,” Signal Processing, vol. 90, no. 1, pp. 157-164, 2010.
 - [11] A. Mahmoudi and M. Karimi, “Estimation of the parameters of multichannel autoregressive signals from noisy observations,” Signal Processing, vol. 8, no. 11, pp. 2777-2783, 2008.
 - [12] S. Lee, T. Stathaki, “Two-dimensional autoregressive modelling using joint second and third order statistics and a weighting scheme,” Eusipco, 2004.
 - [13] L. B. Jackson, and C. Haiguang, “Two dimensional AR modeling by autocorrelation fitting,” ICASSP, vol. 5, pp. 2527-2530, 1990.
 - [14] B. Aksasse, L. Radouane, “Two-dimensional autoregressive (2-D AR) model order estimation,” IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 7, pp. 2072-2077, 1999.
 - [15] S. M. Kay, “Modern Spectral Estimation,” Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1988.