

سنکرون سازی وفقی مقاوم دسته ای از سیستم های غیر خطی نامعین تأخیر دار همراه با اغتشاشات تصادفی

مجتبی حسینی تودشکی^۱، سعید حسین نیا^۲ و جواد عسکری^۳

^۱استادیار پردیس فنی مهندسی شهید عباسپور دانشگاه شهید بهشتی تهران، todesghi@ec.iut.ac.ir

^۲استادیار دانشکده برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد، hoseinia@cc.iut.ac.ir

^۳دانشیار دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان، j-askari@cc.iut.ac.ir

چکیده - در این مقاله یک ساختار کنترل کننده وفقی برای سنکرون سازی کامل دو سیستم غیر خطی تأخیر دار که همراه با نامعینی هستند و نیز اغتشاشات تصادفی وابسته به تأخیر، طراحی شده است. از آنجا که سنکرون سازی در حضور نامعینی ها و اغتشاشات انجام می شود، کنترل کننده طراحی شده در برابر این نامعینی ها مقاوم نیز خواهد بود. در واقع با استفاده از تابع لیاپانوف کراسوسکی و قضیه لاسال پایداری سیستم حلقه بسته اثبات شده و کنترل کننده مد نظر طراحی می شود. ویژگی طراحی انجام شده در این مقاله نسبت به کارهای مشابه مربوط به فرض های در نظر گرفته شده برای توابع نامعین، ساده تر نمودن نامساوی های ماتریسی بدست آمده (LMI) و انعطاف پذیری بیشتر ضرایب کنترل کننده وفقی است. شبیه سازی های انجام شده کارایی و توانایی روش را بهتر نشان می دهد. کلید واژه- سنکرون سازی، کنترل وفقی مقاوم، سیستم تأخیر دار، سیستم غیرخطی نامعین، اغتشاش

۱- مقدمه

آن سنکرون سازی مقاوم بر اساس کنترل کننده وفقی طراحی شده و تأخیر در سیستم نیز مد نظر قرار گرفته است. در مقاله [۱۴] دو پارامتر در کنترل کننده وفقی طراحی شده تحت تطبیق قرار گرفته اند، ضمن آنکه ابعاد نامساوی های ماتریسی خطی نیز بزرگ شده است. بر اساس اطلاعات نویسنده روش پیاده شده در این مقاله قبلاً بکار گرفته نشده و نوآوری های انجام پذیرفته در قانون کنترل و قانون تطبیق جدید می باشد. در واقع در این مقاله با استفاده از یک قانون کنترلی فیدبک با حداقل پارامترهای تطبیق کنترل کننده ای طراحی شده که می تواند سنکرون سازی مقاوم دو سیستم را تضمین نماید. از نکات مهم مربوط به روش ارائه شده، بهره گیری از ماتریس ضرایب به صورت قطری است که در کارهای قبلی و بویژه مرجع [۱۴] انجام نشده است. با این کار به جای طراحی همه درایه های ماتریس کنترل، فقط عناصر روی قطر اصلی طراحی می شوند که ضمن ساده نمودن کنترل کننده نهایی، شرایط بهتری را برای قابلیت حل شدن (LMI feasibility) فراهم می کند. در نهایت شبیه سازی های انجام شده بر روی یک سیستم نمونه نشان می دهد روش مطرح شده قابلیت های ذکر شده را دارد.

۲- تعریف مسأله، فرضیات و لم ها

مدل دینامیکی دو سیستم زیر را که معادله (۱) مربوط به سیستم فرمانده (master) و معادله (۲) مربوط به سیستم فرمانبر

سنکرون سازی سیستم های دینامیکی یکی از موضوعات جالب توجه و کاربردی در سال های اخیر بوده است [۵-۱]. سنکرون سازی در واقع یک رفتار دینامیکی است که دو یا چند سیستم هنگامی که با هم وابستگی هایی دارند، ممکن است از خود نشان دهند. موارد کاربردی این بحث در روبات های چندگانه و به طور خاص تر در انگشتان دست ربات، سیستم های ارتباطی فرمانده- فرمانبر، سیستم های ارتباطی خصوصی دیده می شود. [۸-۶]

سنکرون سازی فرمانده - فرمانبر یکی از انواع مهم مدل های سنکرون سازی است که در آن دو سیستم به صورتی سنکرون می شوند که سیستم فرمانبر حرکت سیستم فرمانده را تقلید می کند. در مقاله [۹] سنکرون سازی مقاوم و شناسایی خطا برای دسته ای از سیستم های با اختلالات غیر خطی و همراه با تأخیر بررسی شده است. همچنین در مقاله [۱۰] سنکرون سازی سیستم های آشوبناک بر پایه تئوری پایداری لیاپانوف سیستم های زمان گسسته و بر پایه نامساوی های ماتریسی خطی انجام شده است.

نتایج دیگری نیز در مقالات [۱۴-۱۱] می توان یافت که بحث سنکرون سازی در آنها پیگیری شده است. یکی از آخرین نتایج در این خصوص در مقالات [۱۳] و [۱۴] وجود دارد که در

(slave) می‌باشد، در نظر بگیرید. دقت کنید که هر دو سیستم تأخیردار و نامعین هستند و سیستم فرمانبر همراه با اغتشاشات تصادفی است.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bf(x_\tau) + g_1(t, x, x_\tau) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + Bf(y_\tau) + g_2(t, y, y_\tau) + u(t) + \\ &\quad \delta(t, y - x, y_\tau - x_\tau)\dot{w} \\ y(t) &= \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن $x = x(t) \in \mathcal{R}^n$ و $y = y(t) \in \mathcal{R}^n$ به ترتیب بردارهای حالت مربوط به دو سیستم فرمانده و فرمانبر هستند. همچنین $x_\tau = x(t - \tau)$ و $y_\tau = y(t - \tau)$ که در آن $\tau > 0$ یک عدد ثابت و مشخص است. ماتریس های $A, B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ شناخته شده و دارای درایه های حقیقی هستند. بردار های تابعی $f(x_\tau), f(y_\tau)$ مشخص و توابع $g_1(t, x, x_\tau)$ و $g_2(t, y, y_\tau)$ شامل بردارهای پیوسته و نامعینی هستند که فرضیات مربوط به آنها در ادامه خواهد آمد. $u(t) \in \mathcal{R}^n$ ورودی سیستم فرمانبر و $w(t)$ یک اغتشاش تصادفی به صورت حرکت براونی در فضای احتمالات با شرایط زیر است.

$$E\{w(t)\} = 0, \quad E\{w^2(t)\} = 1 \quad (۳)$$

تابع $\delta(t, y - x, y_\tau - x_\tau)$ نشاندهنده چگالی نویز است که بر خلاف مقالات [۱۳ و ۱۴] علاوه بر آنکه می تواند به طور صریح به زمان وابسته باشد، می تواند به اختلاف حالت سیستم های فرمانده و فرمانبر نیز وابستگی داشته باشد. در نهایت توابع $\psi(t)$ و $\varphi(t)$ شرایط اولیه دو سیستم را نشان می دهند. با تعریف خطای بین دو سیستم به صورت $e = y - x$ برای معادله دینامیکی خطا از رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} Ae + Bf(y_\tau) - Bf(x_\tau) + g_2(t, y, y_\tau) \\ -g_1(t, x, x_\tau) + u(t) \\ +\delta(t, e, e_\tau)\dot{w} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

برای استفاده از لم لاسال که به سیستم های تأخیر دار تصادفی مرتبط می شود نیاز به تعریف زیر داریم.

تعریف [۱۳]: برای یک سیستم تصادفی تأخیردار به صورت $\dot{e} = q_1(t, e, e_\tau) + q_2(t, e, e_\tau)\dot{w}$ نامنفی: $V(e, t): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n$ را که به مجموعه توابع نامنفی دوبار مشتق پذیر متعلق است در نظر بگیرید. اپراتور L را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned} L\{V(e, t)\} &= \frac{\partial V(e, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(e, t)}{\partial e_i} \right] q_1(t, e, e_\tau) \\ &+ \frac{1}{2} \text{trace} \left[q_2(t, e, e_\tau) \left[\frac{\partial^2 V(e, t)}{\partial e_i \partial e_j} \right] q_2^T(t, e, e_\tau) \right] \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن $\left[\frac{\partial V(e, t)}{\partial e_i} \right]$ یک بردار n تایی و ماتریس ژاکوبین $\left[\frac{\partial^2 V(e, t)}{\partial e_i \partial e_j} \right]$ یک ماتریس $n \times n$ است. **فرضیات:** برای اثبات نتایجی که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت دو فرض زیر لازم است.

۱- عدد ثابت و مثبت L وجود دارد به نحوی که تابع برداری غیر خطی f شرط لپشیتز را به صورت زیر برای هر x_τ و y_τ برآورده می کند.

$$\|f(y_\tau) - f(x_\tau)\| \leq L\|y_\tau - x_\tau\| = L\sqrt{e_\tau^T e_\tau} \quad (۶)$$

۲- برای توابع غیر خطی نامعین $g_1(t, x, x_\tau)$ و $g_2(t, y, y_\tau)$ و $\delta(t, e, e_\tau)$ ماتریس های مثبت معین G_1, G_2, M_1, M_2 وجود دارند به نحوی که نامساوی های زیر برقرار باشد.

$$\|g_2(t, y, y_\tau) - g_1(t, x, x_\tau)\|^2 \leq e^T M_1 e + e_\tau^T M_2 e_\tau \quad (۷)$$

$$\|\delta(t, e, e_\tau)\|^2 \leq e^T G_1 e + e_\tau^T G_2 e_\tau \quad (۸)$$

لم ۱ [۱۵]: سیستم $\dot{e} = q_1(t, e, e_\tau) + q_2(t, e, e_\tau)\dot{w}$ را با فرض داشتن جواب یکتا برای هر شرط اولیه در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید توابع $q_1(t, e, e_\tau)$ و $q_2(t, e, e_\tau)$ بر روی (e, e_τ) به صورت محلی کراندار و بر روی t به صورت هموار کراندار باشند. اگر تابع V و $\beta \in L^1(\mathcal{R}_+, \mathcal{R}_+)$ و نیز $\omega_1, \omega_2 \in C(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}_+)$ وجود داشته باشد به نحوی که موارد زیر برقرار باشد.

$$L\{V(e, e_\tau, t)\} \leq \beta(t) - \omega_1(e) + \omega_2(e_\tau) \quad (۹)$$

$$\omega_1(e) > \omega_2(e), \quad \forall e \neq 0 \quad (۱۰)$$

$$\lim_{\|e\| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq \infty} V(e, e_\tau, t) = \infty \quad (۱۱)$$

در این صورت $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$

لم ۲ [۱۶]: برای هر ماتریس متقارن مثبت معین $\Theta \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ثوابت مثبت h_m, h_M نامساوی انتگرالی زیر برای تابع برداری $l: [h_m, h_M] \rightarrow \mathcal{R}^n$ برقرار است

$$\begin{aligned} (h_2(t) - h_1(t)) \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} l(\theta) \Theta l^T(\theta) d\theta \geq \\ \left(\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} l(\theta) d\theta \right) \Theta \left(\int_{h_1(t)}^{h_2(t)} l(\theta) d\theta \right)^T \end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= PA + A^T P + \epsilon_2 M_1 + Q_1 + \tau Q_2 + 2\lambda \hat{k} + \lambda G_1 \quad (18) \\ \Psi_{33} &= \epsilon_1 L^2 I_n + \epsilon_2 M_2 - Q_1 + \lambda G_2\end{aligned}$$

در این صورت سیستم فرمانده- فرمانبر فوق با کنترل کننده
وفقی مقاوم روابط (۱۴) و (۱۵) قابل سنکرون سازی نمایی مقاوم
است.

اثبات: تابع لیاپانوف زیر را برای سیستم دینامیکی خطای تعریف
شده در رابطه (۴) انتخاب می کنیم.

$$\begin{aligned}V(e, t) &= e^T P e + \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_1 e(s) ds + \\ &\int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^T(\psi) Q_2 e(\psi) d\psi ds + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{\max}(P)}{\alpha_i} (k_i - \hat{k}_i)^2\end{aligned} \quad (19)$$

برای محاسبه مشتق ترم سوم از قاعده زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) ds \right) &= f(t, b(t)) b'(t) - \\ &f(t, a(t)) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, s)}{\partial t} ds\end{aligned} \quad (20)$$

بر این اساس برای مشتق ترم سوم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^T(\psi) Q_2 e(\psi) d\psi ds \right) &= \\ \int_{-\tau}^0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{t+s}^t e^T(\psi) Q_2 e(\psi) d\psi \right) ds &= \\ \int_{-\tau}^0 \left(e^T(t) Q_2 e(t) - \right. & \\ \left. - e^T(t+s) Q_2 e(t+s) \right) ds &= \\ \tau e^T(t) Q_2 e(t) - \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds\end{aligned} \quad (21)$$

از طرف دیگر از آنجا که می خواهیم از اپراتور تعریف شده در
رابطه (۵) برای اثبات نتایج استفاده کنیم، هر المان مربوط به این
اپراتور را به صورت جداگانه محاسبه می نماییم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(e, t)}{\partial t} &= e^T Q_1 e - e_\tau^T Q_1 e_\tau + \tau e^T Q_2 e - \\ &\int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds + \\ &2 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{\max}(P)}{\alpha_i} (k_i - \hat{k}_i) \dot{k}_i\end{aligned} \quad (22)$$

$$\left[\frac{\partial V(e, t)}{\partial x_i} \right] = 2e^T P, \left[\frac{\partial^2 V(e, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = 2P \quad (23)$$

بنابراین داریم

که در آن $h_1(t)$ و $h_2(t)$ توابع مشتق پذیر هستند و نامساوی
 $0 < h_m \leq h_1(t) \leq h_2(t) \leq h_M$ برای آنها برقرار است.

لم ۳: برای هر $x, y \in \mathcal{R}^n$ و هر مقدار اسکالر مثبت ϵ نامساوی
زیر برقرار است.

$$2x^T y \leq \epsilon x^T x + \epsilon^{-1} y^T y \quad (13)$$

۳- طراحی کنترل کننده وفقی مقاوم سنکرون ساز

هدف اصلی این مقاله طراحی کنترل کننده برای سیستم فرمانده
- فرمانبر ارائه شده در روابط (۱) و (۲) است به نحوی که علی
رغم وجود نامعینی ها و نیز اغشتاشات تصادفی موجود در
سیستم، سیستم فرمانبر بتواند سیستم فرمانده را دنبال کند.
برای این منظور کنترل کننده فیدبک وفقی به صورت زیر
پیشنهاد می شود.

$$u = ke, \quad k = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (14)$$

$$\dot{k}_i = -\alpha_i e_i^2 \quad (15)$$

که در آن مقادیر $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ باید به نحو مناسب تعیین
شوند. همچنین ضرایب $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ هر مقدار دلخواه
مثبتی می توانند داشته باشند. انتخاب مقدار کمتر این ضرایب
همگرایی کند تر و مقدار بیشتر همگرایی سریعتر را باعث می
شود. انتخاب این ساختار کنترل کننده نسبت به روش ارائه شده
در مقاله [۱۴] از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار است، زیرا
امکان انتخاب k_i ها به صورت مجزا وجود دارد در حالیکه در
مقاله مذکور فقط یک انتخاب برای همه خطاها در نظر گرفته
شده است. همچنین این روش نسبت به مقالاتی که در روش
ارائه شده در آنها ماتریس k را باید به عنوان یک ماتریس کامل
طراحی نمود از سادگی بیشتری برخوردار است.

قضیه ۱: فرض کنید برای سیستم توصیف شده توسط روابط (۱)
و (۲) فرضیات ۱ و ۲ برقرار و ماتریس های متقارن مثبت معین
 P, Q_1, Q_2 و اسکالرهایی $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, \lambda > 0$ وجود داشته
باشند به نحوی که نامساوی های ماتریسی خطی زیر برقرار باشد

$$\rho = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & PB & 0 \\ B^T P & -(\epsilon_1 + \epsilon_2) I_n & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$P < \lambda I \quad (17)$$

که در آن

رابطه (۱۶) می توان نتیجه گرفت $L\{V(e, t)\}$ بنابراین با استفاده از لم ۱ پایداری مجانبی سیستم دینامیکی خطا برای سنکرون سازی اثبات می شود.

۴- نتایج شبیه سازی

به منظور نشان دادن کارایی روش ارائه شده در این مقاله سیستم دینامیکی Chua که یک سیستم شناخته شده است در نظر گرفته شده است. معادلات این سیستم به صورت زیر در مقالات بیان می شود [۱۴]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10[x_2(t) - x_1(t) - f_1(x_1(t))] \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -15x_2(t) - 0.0385x_3(t) \end{cases} \quad (۳۳)$$

که در آن تابع $f_1(x_1(t))$ از رابطه زیر بدست می آید

$$f_1(x_1(t)) = bx_1(t) + 0.5(a - b)(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|) \quad (۳۴)$$

و a, b اعداد ثابتی هستند. این سیستم برای مقادیر بخصوصی از a, b رفتار آشوبناک از خود نشان می دهد. واضح است که می توان رابطه (۳۳) را به صورت زیر نوشت.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t)) \quad (۳۵)$$

که در آن $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T$ ، $B = \text{diag}\{-10, 1, 1\}$ ، $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), 0, 0)^T$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -0.0385 \end{bmatrix}$$

با این توضیح برای سیستم اصلی، سیستم فرمانده را به صورت $\dot{x} = Ax + Bf(x_\tau) + g_1(t, x, x_\tau)$ و سیستم فرمانبر را به صورت

$$\dot{y} = Ay + Bf(y_\tau) + g_2(t, y, y_\tau) + u(t) + \delta(t, y - x, y_\tau - x_\tau)\dot{w}$$

در نظر می گیریم که در آن توابع نامعین به صورت زیر فرض می شوند

$$g_1(t, x, x_\tau) = (\sin(x_1(t)) \ -\cos(x_2(t - \tau)) \ 1)^T$$

$$g_2(t, y, y_\tau) = (\cos(y_1(t - \tau)), 0.5, \sin(y_3(t - \tau)))^T$$

$$\delta(t, y - x, y_\tau - x_\tau) = (x_1(t) - y_1(t) \ 0 \ x_3(t - \tau) - y_3(t - \tau))^T$$

$$\begin{aligned} L\{V(e, t)\} &= 2e^T P[Ae + Bf(y_\tau) - Bf(x_\tau) + \\ &\quad g_2(t, y, y_\tau) - g_1(t, x, x_\tau) + u(t)] + \\ &\quad e^T Q_1 e - e_\tau^T Q_1 e_\tau + \tau e^T Q_2 e - \\ &\quad \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{\max}(P)}{\alpha_i} (k_i - \hat{k}_i) \dot{k}_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \text{trace}[\delta^T(t, e, e_\tau) 2P\delta(t, e, e_\tau)] = \\ &\quad e^T(PA + A^T P)e + 2e^T PB[f(y_\tau) - f(x_\tau)] \\ &\quad + 2e^T P[g_2(t, y, y_\tau) - g_1(t, x, x_\tau)] + 2e^T Pke + \\ &\quad e^T Q_1 e - e_\tau^T Q_1 e_\tau + \tau e^T Q_2 e - \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{\max}(P) k_i e_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{\max}(P) \hat{k}_i e_i^2 + \\ &\quad \text{trace}[\delta^T(t, e, e_\tau) P\delta(t, e, e_\tau)] \end{aligned} \quad (۲۴)$$

نامساوی های زیر را با توجه به رابطه $P \leq \lambda_{\max}(P)I$ و فرضیات و لم ۳ در بخش قبل می توان نوشت.

$$2e^T Pke \leq 2\lambda_{\max}(P)e^T ke = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_{\max}(P) k_i e_i^2 \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} \text{trace}[\delta^T(t, e, e_\tau) P\delta(t, e, e_\tau)] &\leq \\ \lambda_{\max}(P)[e^T G_1 e + e_\tau^T G_2 e_\tau] \end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} 2e^T PB[f(y_\tau) - f(x_\tau)] &\leq \epsilon_1^{-1} e^T PBB^T Pe \\ + \epsilon_1 \|f(y_\tau) - f(x_\tau)\|^2 &\leq \epsilon_1^{-1} e^T PBB^T Pe + \\ \epsilon_1 L^2 e_\tau^T e_\tau \end{aligned} \quad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} 2e^T PB[g_2(t, y, y_\tau) - g_1(t, x, x_\tau)] &\leq \\ \epsilon_2^{-1} e^T PBB^T Pe + \epsilon_2 \|g_2(t, y, y_\tau) - g_1(t, x, x_\tau)\|^2 &\leq \epsilon_2^{-1} e^T PBB^T Pe + \epsilon_2 e^T M_1 e + \epsilon_2 e_\tau^T M_2 e_\tau \end{aligned} \quad (۲۸)$$

از طرف دیگر بر اساس لم ۲ رابطه زیر را داریم

$$\begin{aligned} - \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds &\leq \\ - \frac{1}{\tau} \left(\int_{t-\tau}^t e(s) ds \right)^T Q_2 \left(\int_{t-\tau}^t e(s) ds \right) &\leq 0 \end{aligned} \quad (۲۹)$$

لذا برای اپراتور $L\{V(e, t)\}$ می توان نامساوی زیر را نوشت

$$L\{V(e, t)\} \leq v^T \Pi v \quad (۳۰)$$

که در آن $v = (e^T, e_\tau^T)^T$ و

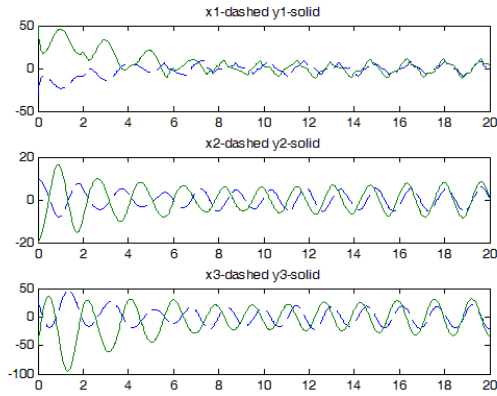
$$\Pi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & 0 \\ 0 & \Theta_{22} \end{bmatrix} \leq \rho \quad (۳۱)$$

که در آن

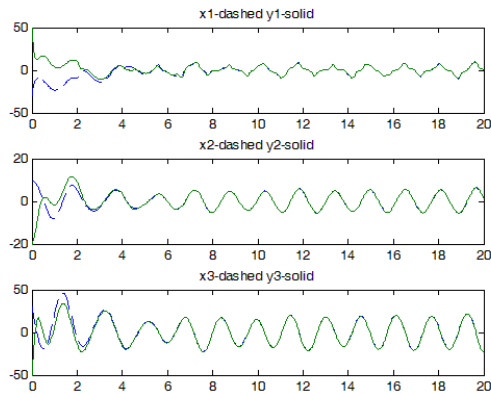
$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= PA + A^T P + \epsilon_1^{-1} e^T PBB^T Pe + \\ \epsilon_2^{-1} e^T PBB^T Pe + \epsilon_2 M_1 + Q_1 + \tau Q_2 + \\ \lambda_{\max}(P)(2\hat{k} + G_1) \\ \Theta_{22} &= \epsilon_1 L^2 I_n + \epsilon_2 M_2 - Q_1 + \lambda_{\max}(P)G_2 \end{aligned} \quad (۳۲)$$

نامساوی آخر در رابطه (۳۱) با استفاده از لم شناخته شده شر و نیز نامساوی $P < \lambda I$ بدست آمده است. از فرض انجام شده در

را با انتخاب مقادیر $\alpha_i = 0.01$ نشان می دهند. شکل های ۵و۴ نیز به ترتیب وضعیت متغیرهای حالت و ضرایب تطبیق را این بار با انتخاب مقادیر $\alpha_i = 1$ نشان می دهند. همانطور که ملاحظه می شود انتخاب ضریب بزرگتر منجر به سرعت در تطبیق و همگرایی سریعتر شده است. دقت کنید که در مقایسه با روش ارائه شده در مقاله [۱۴]، روش ارائه شده در این مقاله از متغیرهای ماتریسی کمتری در قضیه استفاده کرده که این مسأله، به LMI ها قابلیت حل پذیری بهتری می دهد. همچنین از توابع مشتق ناپذیر در رابطه کنترل کننده استفاده نشده است.



شکل ۱: متغیرهای حالت سیستم فرمانده x_1, x_2, x_3 در مقابل سیستم فرمانبر y_1, y_2, y_3 در حالتی که کنترل کننده اعمال نمی شود.



شکل ۲: متغیرهای حالت سیستم فرمانده x_1, x_2, x_3 در مقابل سیستم فرمانبر y_1, y_2, y_3 مثال شبیه سازی شده در حالتی که $\alpha_i = 0.01$ باشد.

همچنین مقادیر عددی نیز عبارتند از $a = 6, b = -0.75, \tau = 2$. برای اختلال $w(t)$ نیز نویز سفید با توان 0.1 در نظر گرفته می شود. می توان بررسی نمود که فرضیات مطرح شده در روابط (۶) و (۷) و (۸) با مقدار عددی $L^2 = 56.25$ و مقادیر ماتریسی $M_1 = M_2 = I_{3 \times 3}$ و $G_1 = \text{diag}\{0.5, 0, 0\}$ و $G_2 = \text{diag}\{0, 0, 0.5\}$ مقدار L^2 با استفاده از این نتیجه بدست آمده است که می توان برای تابع غیر خطی $f_1(x_1(t))$ نامساوی زیر را نوشت.

$$|f_1(x_1(t)) - f_1(\hat{x}_1(t))| \leq (|b| + |a - b|) \cdot |x_1(t) - \hat{x}_1(t)| \leq 7.5|x_1(t) - \hat{x}_1(t)|$$

با استفاده از جعبه ابزار LMI در نرم افزار MATLAB می توان نامساوی های ماتریسی روابط (۱۶) و (۱۷) را حل نمود و جواب های زیر را برای مقدار $\lambda = 10$ بدست آورد.

$$P = \begin{bmatrix} 1.494 & 0.0554 & 0.2891 \\ 0.0554 & 4.9770 & -0.0454 \\ 0.2891 & -0.0454 & 2.7289 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 46.8120 & -1.1657 & 0.4711 \\ -1.1657 & 46.5851 & 0.2466 \\ 0.4711 & 0.2466 & 44.9620 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 27.4604 & -5.7248 & -0.0980 \\ -5.7248 & 33.0837 & 13.4795 \\ -0.0980 & 13.4795 & 31.9534 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_1 = 0.1269 \text{ و } \epsilon_2 = 21.1173$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -6.7558 & 0 & 0 \\ 0 & -7.7839 & 0 \\ 0 & 0 & -7.9155 \end{bmatrix}$$

لازم به ذکر است که بزرگترین مقدار ویژه ماتریس P برابر است با 4.9786 که از مقدار $\lambda = 10$ کوچکتر است و لذا شرط نامساوی رابطه (۱۷) برقرار خواهد بود. حال می توان با در نظر گیری $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ در رابطه (۱۵) که مربوط به بخش وفقی کنترل کننده ارائه شده می باشد و نیز شرایط اولیه ای که در مقاله [۱۴] نیز انتخاب شده یعنی

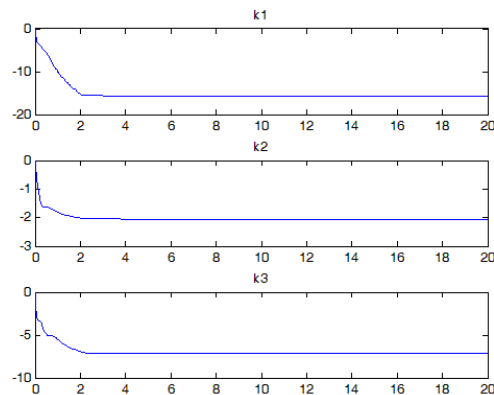
$$y(0) = (50, -20, -50)^T \text{ و } x(0) = (-30, 10, 30)^T$$

شبیه سازی را انجام داد. نتایج مربوط به این شبیه سازی ها در شکل های ۱ و ۲ و ۳ آمده است. شکل ۱ مربوط به زمانی است که کنترل کننده اعمال نشده است. همانطور که دیده می شود مسیر های دنبال شده توسط دو سیستم کاملاً متفاوت با هم هستند. شکل ۲ و ۳ به ترتیب وضعیت متغیرهای حالت و ضرایب تطبیق

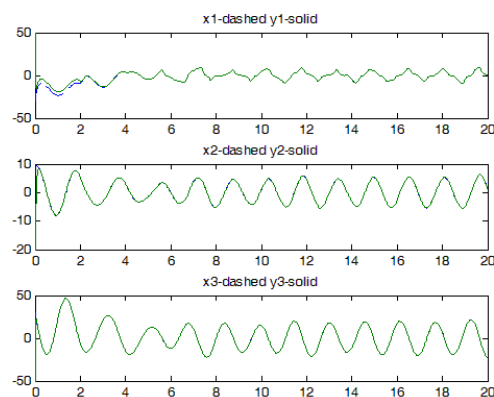
گرفت. در روش ارائه شده از متغیرهای حالت کمتری استفاده شد و همچنین در کنترل کننده وفقی فقط یک قانون بکار گرفته شد که این مسئله نسبت به کارهای گذشته بهبودهایی در روش و نتایج داشت. برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده نیز سیستم دینامیکی chua مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

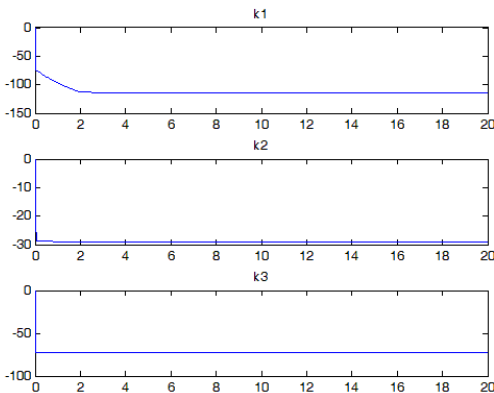
- [1] J.Q. Lu and W.C. Ho, "Globally exponential synchronization and synchronizability for general dynamical networks" *IEEE Trans. Syst. Man. Cybern Part B: Cybern* Vol. 40, pp. 350-361, 2010.
- [2] S. Beyhan, "Runge-Kutta model-based nonlinear observer for synchronization and control of chaotic systems", *ISA Trans.* Vol. 52, pp. 501-9, 2013.
- [3] M. Pourmahmood, S. Khanmohammadi and G. Alizadeh, "Synchronization of two different uncertain chaotic systems with unknown parameters using a robust adaptive sliding mode controller", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol.16, pp. 2853-2868, 2011.
- [4] L. Zhang and Y. Yan, "Robust synchronization of two different uncertain fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 26, Issue 3, pp. 1761-1767, 2014.
- [5] Q. Wang and Y. Yu and H. Wang, "Robust Synchronization of Hyperchaotic Systems with Uncertainties and External Disturbances" *Jour. Of Applied Math.* Vol. 2014, pp. 1-8, 2014.
- [6] C. Belta and V. Kumar, "Trajectory design for formations of robots by kinetic energy shaping", *IEEE Conference on robotics and automation*, Washington, DC, USA, 2002.
- [7] J.W. Simpson-Porco and F. Dorfler and F. Bullo, "Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids" *Automatica*, Vol. 49, Issue 9, pp. 2603-2611, 2013.
- [8] H. Dou and S. Wang, "Robust adaptive motion/force control for motion synchronization of multiple uncertain two-link manipulators", *Mechanism and machine theory*, Vol. 67, pp. 77-93, 2013.
- [9] H.R. Karimi, "Robust synchronization and fault detection of uncertain master-slave systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations", *Int. Jour. Control. Autom. Syst.* Vol. 9, pp. 671-680, 2011.
- [10] R. Mei and M. Chen, "Robust adaptive synchronization control of delayed uncertain triangle chaotic systems based on disturbance observers", *3rd Int. Conf. Intelligent Control and Information Processing*, Dalian, China, 2012.
- [11] L.D. Zhao, J.B. Hu, J.A. Fang, W.X. Cui, Y.L. Xu and X. Wang, "Adaptive synchronization and parameter identification of chaotic system with unknown parameters and mixed delays based on a special matrix structure", *ISA Trans.* Vol. 52, pp. 738-743, 2013.
- [12] J.Q. Lu, J.D. Cao and W.C. Ho Daniel, "Adaptive stabilization and synchronization for chaotic Lur'e systems with time-varying delay", *IEEE Trans. Circuits Syst.* Vol. 55, pp. 1347-1356, 2011.
- [13] H. Gu, "Adaptive synchronization for competitive neural networks with different time scales and stochastic perturbation" *Neurocomputing*, Vol. 73, pp. 350-356, 2009.
- [14] T. Wang, W. Zhou, S. Zhao and W. Yu, "Robust master-slave synchronization for general uncertain delayed dynamical model based on adaptive control scheme" *ISA Transactions*, Vol. 53, pp. 335-340, 2014.
- [15] X. Mao, "A note on the LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 268, pp. 125-142, 2002.
- [16] Q.L. Han, X.F. Jiang and X. Ma, "Computation of delay bound for linear neutral systems with interval time-varying discrete delay", *Dyn. Contin. Discret. Impuls. Syst.* Vol. 13, pp. 117-131, 2006.



شکل ۳: ضرایب تطبیق در کنترل کننده در حالت $\alpha_i = 0.01$



شکل ۴: متغیرهای حالت سیستم فرمانده x_1, x_2, x_3 در مقابل سیستم فرمانبر y_1, y_2, y_3 مثال شبیه سازی شده در حالتی که $\alpha_i = 1$ باشد.



شکل ۵: ضرایب تطبیق در کنترل کننده در حالت $\alpha_i = 1$

۵- نتیجه گیری

در این مقاله سنکرون سازی مقاوم دسته ای از سیستم های غیر خطی نامعین با استفاده از کنترل کننده وفقی مورد بررسی قرار