

مکان‌یابی منبع سیگنال مبتنی بر TDOA در رادار پسیو

مهران غریبی مرزنکلا^۱، محمدرضا تابان^۲، علی‌اکبر تدین تفت^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مخابرات سیستم دانشگاه یزد، m_gharibi@stu.yazd.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان، mrtaban@cc.iut.ac.ir

^۳ دانشیار دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه یزد، tadaion@yazd.ac.ir

چکیده - در این مقاله بابیان مزیت‌های استفاده از روش اختلاف‌زمانی سیگنال‌های رسیده (TDOA) در مکان‌یابی پسیو، روش‌هایی تکرار شونده مبتنی بر سری تیلور، و فرم بسته مبتنی بر حداقل مربعات خطی با توجه به چالش‌های موجود در اقدامات پشتیبانی الکترونیک (ESM) برای مکان‌یابی پسیو مورد بررسی قرار گرفته و برای بهبود عملکرد این روش‌ها رویکردی بر پایه استفاده از BFGS ارائه شده است. مکان‌یابی پسیو درواقع به دسته‌ای از روش‌های مکان‌یابی اطلاق می‌گردد که با استفاده از گیرنده‌ها شنود در رهگیری پسیو منتشرکننده سیگنال و یا مکان‌یابی پسیو اخلال‌گر بکار می‌روند. با فرض معلوم بودن ماتریس کواریانس نویز TDOA و اعمال وزن‌هایی بر اساس آن در مسئله مکان‌یابی، بهبود قابل توجهی در دقت تخمین موقعیت ایجاد می‌گردد. حال آن‌که در مکان‌یابی پسیو، تخمین نویز TDOA بدلیل عدم اطلاع از مشخصات سیگنال دریافتی و نویز محیط، با دقت کم و دشواری‌های بسیار همراه است. بر این اساس توسعه روش‌های مکان‌یابی که بدون نیاز به مشخصات آماری نویز TDOA، قادر به مکان‌یابی هستند ضروری است. در مقاله با استفاده از فن شبه نیوتن BFGS روشی در مکان‌یابی پسیو ارائه می‌شود که نتایج و شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد این روش با دارا بودن دقت مناسب، از سرعت خوبی هم برای کاربردهای بلادرنگ برخوردار است.

کلیدواژه- رادار پسیو، گیرنده پسیو، مکان‌یابی پسیو، BFGS، TDOA

۱- مقدمه

از آنتن همه‌سویه برای افزایش احتمال شنود در گیرنده‌هایی مانند گیرنده‌های ویدئو کریستال (CVR^۵)، یکی از روش‌های مؤثر در مکان‌یابی پسیو است. زیرا روش‌هایی مانند توان سیگنال دریافتی^۶ (RSS)، زاویه ورود سیگنال^۷ (AOA)، زمان رسیدن سیگنال^۸ (TOA) و اختلاف فرکانس دریافتی^۹ (FDOA) به ترتیب نیازمند توان ارسالی سیگنال، آنتن آرایه‌ای، همزمانی فرستنده و گیرنده و فرکانس سیگنال دریافتی می‌باشند. برای تخمین TDOA روش‌های گوناگونی ارائه شده است که بر پایه استفاده از تابع همبستگی متقابل و تعمیم آن عمل می‌نمایند [۲]. در زمینه مکان‌یابی مبتنی بر TDOA، مرجع [۳] معادلات پایه‌ای مکان‌یابی TDOA را طرح و حل نموده است. روش‌های مختلفی برای حل مسئله مکان‌یابی تاکنون ارائه شده است. از آن جمله می‌توان به روش‌های مبتنی بر حداقل مربعات خطی^{۱۰} (LLS) اشاره کرد. این روش‌ها یک فرم بسته برای تخمین موقعیت هدف ارائه می‌دهند [۴]. از میان این روش‌ها با صرف نظر از روش‌هایی که به ماتریس کواریانس خطای TDOA

امروزه مکان‌یابی مبتنی بر TDOA در رادار پسیو یکی از موضوعات مهم در پدافند غیرعامل است. در این مقاله به مجموعه‌ای از گیرنده‌های شنود که برای مکان‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرند رادار پسیو می‌گوییم؛ این رادار دارای مقاومت بیشتری در مقابل اقدامات جنگ الکترونیک دشمن است و همچنین قادر به مکان‌یابی منابع سیگنال بکار رفته در هدایت موشک، برخی لینک‌های داده، ارتفاع‌سنج‌ها، گسیل‌های ناوبری^۱ و سامانه تشخیص دوست و دشمن است. از دیگر ضرورت‌های پرداختن به امر مکان‌یابی در ELINT^۲ و ESM^۳، بهره‌گیری از آن برای پی‌بردن به قابلیت‌های رادار تهدید مانند حاصل ضرب توان ارسالی رادار در بهره آنتن آن است، که نیازمند داشتن مکان هدف است [۱].

روش اختلاف‌زمانی رسیدن سیگنال^۴ (TDOA) با توجه به دراختیار نبودن اطلاعات پیشین از سیگنال دریافتی و استفاده

^۵ Crystal Video Receiver

^۶ Receive Signal Strength

^۷ Angle Of Arrival

^۸ Time Of Arrival

^۹ Frequency Difference Of Arrival

^{۱۰} Linear Least Squares

^۱ Navigation Emissions

^۲ Electronic Intelligence

^۳ Electronics Support Measures

^۴ Time Difference Of Arrival

که در آن r_t اختلاف فواصل اندازه‌گیری شده گیرنده‌های t ام و مرجع با فرستنده بوده که به‌عنوان مشاهده برای تخمین موقعیت فرستنده از روی TDOA ها استفاده می‌شود. با توجه به وجود خطا در محاسبه TDOA ها رابطه مقدار مشاهده با اختلاف فاصله فوق‌الذکر به‌صورت زیر است.

$$r_t = d_{t,1} + n_{\text{TDOA},t}, \quad t = 2, 3, \dots, N, \quad (3)$$

که در آن $n_{\text{TDOA},t}$ نویزی گوسی با متوسط صفر و واریانس σ_t^2 است. با توجه به مکان‌یابی در ۳ بعد، تعداد گیرنده‌ها باید ۳ یا بیشتر باشد. بر همین اساس دستگاه معادلات هذلولی (۳) (شامل مجهولات \mathbf{x}) دارای دو حالت همواره معین^{۱۷} و فرا معین^{۱۸} خواهد بود، که در هر دو حالت در برخی از موارد دستگاه ناسازگار^{۱۹} می‌گردد. راه‌حل مناسب برای مقابله با بدحالی استفاده از معیارهای مبتنی بر حداقل سازی متوسط خطاها است. برای این منظور تابع هزینه حداقل مربعات غیرخطی^{۲۰} (NLS) به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌گردد [۷].

$$J_{\text{NLS}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{t=2}^N \left(r_t - \sqrt{(\tilde{x} - x_t)^2 + (\tilde{y} - y_t)^2 + (\tilde{z} - z_t)^2} \right)^2 + \sqrt{(\tilde{x} - x_1)^2 + (\tilde{y} - y_1)^2 + (\tilde{z} - z_1)^2} \quad (4)$$

که در آن $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]^T$ و تخمین موقعیت از رابطه (۵) به دست می‌آید.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} J_{\text{NLS}}(\tilde{\mathbf{x}}). \quad (5)$$

با فرض پیوسته بودن و دو بار مشتق‌پذیری تابع (۴) می‌توان تخمین موقعیت فرستنده را با استفاده از (۶) محاسبه نمود.

$$\left. \frac{\partial J(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}} = 0. \quad (6)$$

اگر $\hat{\mathbf{x}}_p$ یک برآورد اولیه از حل (۶) باشد، برای یافتن ریشه معادله (۶) بسط تیلور حول $\hat{\mathbf{x}}_p$ به‌صورت رابطه (۷) است.

$$\left. \frac{\partial J(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}} \approx \left. \frac{\partial J(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_p} + \left. \frac{\partial^2 J(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}} \partial \tilde{\mathbf{x}}^T} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_p} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_p). \quad (7)$$

هسین تابع هزینه به‌صورت رابطه (۸) تعریف می‌گردد.

نیازمند هستند، می‌توان به روش اصلاح خطی حداقل مربعات^{۱۱} (LCLS) اشاره نمود [۵]. دسته دیگری از روش‌های مکان‌یابی، روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های تکرارشونده هستند [۶]. در این دسته می‌توان به روش‌هایی مانند نیوتن^{۱۲}، گوس-نیوتن^{۱۳}، تندترین کاهش^{۱۴} (SD)، لونبرگ-مارکارد^{۱۵} (LM) و حداکثر درست‌نمایی^{۱۶} (ML) اشاره کرد. روش آخر به دلیل نیازمند بودن به توزیع آماری خطا قابلیت استفاده در مکان‌یابی پس‌یو مطرح‌شده را ندارد.

در ادامه در بخش ۲ معادلات ریاضی حاکم بر سیستم مکان‌یابی مبتنی بر TDOA ارائه می‌شود. در بخش ۳ روش‌های مکان‌یابی و مزایا و معایب آن‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴ روش پیشنهادی برای بهبود نقاط ضعف سایر روش‌ها ارائه‌شده و با استفاده از روش پیمایش معکوس و شرط ولف این روش را برای کاربرد آنی مورد استفاده قرار می‌دهیم. بخش ۵ شامل شبیه‌سازی و نتایج به‌دست‌آمده از به‌کارگیری این روش برای مکان‌یابی در رادار پس‌یو است. در بخش ۶ نیز به نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

نمادهای بکار رفته در این مقاله عبارت‌اند از: ترانهاده: $(.)^T$ ، نرم ۲ (نرم اقلیدسی): $\|.\|$ ، گرادیان: ∇ ، مثبت معین: PD، تعداد گیرنده: N ، برداری تمام یک: $\mathbf{1}_{1 \times N}$ ، سرعت نور: c ، گیرنده مرجع: \mathbf{x}_1 ، فاصله هدف تا گیرنده مرجع: R_1 ، بعد فضای مکان‌یابی: D و ضریب لاگرانژ: λ .

۲- روابط حاکم بر مکان‌یابی مبتنی بر TDOA

با فرض قرارگیری فرستنده در مختصات $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ و گیرنده t ام در $\mathbf{x}_t = [x_t, y_t, z_t]^T$ ، اختلاف فاصله گیرنده t ام تا فرستنده بافاصله گیرنده مرجع (\mathbf{x}_1) تا فرستنده عبارت است از:

$$d_{t,1} = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_t\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|, \quad (1)$$

که در آن $t = 2, \dots, N$ است. در صورتی که τ_t معرف زمان رسیدن سیگنال به گیرنده t ام باشد، به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$r_t = (\tau_t - \tau_1) \times c \quad t = 2, 3, \dots, N, \quad (2)$$

¹⁷ Determined :

تعداد معادلات و مجهولات برابر هستند

¹⁸ Overdetermined:

تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است

¹⁹ Inconsistent

²⁰ Nonlinear Least Square

¹¹ Linear Correction Least Squares

¹² Newton Method

¹³ Gauss-Newton

¹⁴ Steepest Descent

¹⁵ Levenberg-Marquardt

¹⁶ Maximum Likelihood

نیوتن در صورت مثبت معین نبودن \mathbf{S}_k ، به نقطه بهینه همگرا نمی‌شوند. در راهبرد ناحیه مطمئن، برخلاف جستجوی خطی عمل می‌گردد؛ بدین صورت که ابتدا ناحیه مطمئن (طول گام) تعیین شده و سپس جهت کاهشی به دست می‌آید. یکی از این روش‌ها لونیگ-مارکارد است که در امتداد روش گوس-نیوتن شکل گرفته است. این روش با افزودن مقدار عددی μ به $\mathbf{G}^T(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})$ باعث می‌گردد تا مقدار ویژه آن مثبت گردیده، فلذا همگرایی تضمین شده‌ای داشته باشد. گام‌های این روش در رابطه (۱۳) نمایش داده شده است.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\mathbf{G}^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) + \mu_k \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x}_k). \quad (13)$$

اما افزودن μ_k از دو منظر بار محاسباتی را افزایش خواهد داد. برای محاسبه μ_k لازم است تا در هر گام PD بودن ماتریس $\mathbf{G}^T(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})$ بررسی شده و از روی آن مقادیر μ_k محاسبه گردد. از منظر دیگر افزودن μ_k سبب بزرگ شدن مقادیر ویژه می‌شود و در نتیجه حداکثر طول گام طبق رابطه (۱۴) کوچک‌تر شده و تعداد گام‌های بیشتری برای همگرایی مورد نیاز است [۸].

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2 = \frac{\|\nabla J(\mathbf{x}_k)\|_2}{\lambda_{\min}}, \quad (14)$$

که در آن λ_{\min} کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس هسین تابع هزینه در گام k ام است. دسته دیگری از روش‌های مکان‌یابی بر پایه تابع هزینه حداقل مربعات خطی عمل می‌نمایند. برای این منظور با گرفتن مجذور از دو طرف معادله (۳) و ساده‌سازی، آن را به فرم ماتریسی (۱۵) تبدیل می‌کنند [۴].

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (15)$$

که در آن $\mathbf{u} = [x - x_1, y - y_1, z - z_1, R_1]^T$ و:

$$\mathbf{A} = 2 \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 - x_N & y_1 - y_N & z_1 - z_N & r_N \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \\ \vdots \\ r_N^2 - (x_1 - x_N)^2 - (y_1 - y_N)^2 - (z_1 - z_N)^2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

تابع هزینه حداقل مربعات خطی بر حسب \mathbf{u} به صورت رابطه (۱۸) است.

$$J_{LLS}(\mathbf{u}) = (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}). \quad (18)$$

تخمین $\hat{\mathbf{u}}$ بر اساس مینیمم‌سازی تابع هزینه (۱۸) به صورت (۱۹) به دست می‌آید.

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (19)$$

$$\mathbf{H}(J(\hat{\mathbf{x}}_p)) = \frac{\partial^2 J(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}} \partial \hat{\mathbf{x}}^T} \Big|_{\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p}. \quad (8)$$

باکمی ساده‌سازی (۷)، تخمین موقعیت هدف از رابطه (۹) محاسبه می‌گردد [۶].

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \hat{\mathbf{x}}_p - [\mathbf{H}(J(\hat{\mathbf{x}}_p))]^{-1} \nabla(J(\hat{\mathbf{x}}_p)). \quad (9)$$

همان‌طور که در رابطه (۹) مشاهده می‌شود، در صورتی که ماتریس \mathbf{H} وارون پذیر باشد، $\hat{\mathbf{x}}$ در امتداد کاهشی تابع هزینه حداقل مربعات غیر خطی انتخاب می‌شود.

۳- بررسی روش‌های مکان‌یابی

در این بخش روش‌های مکان‌یابی در قالب دودسته، روش‌های تکرارشونده و روش‌های فرم بسته و خطی ارائه می‌گردند.

در روش‌های تکرارشونده هدف تولید دنباله نقاط $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{+\infty}$ با نرخ همگرایی مناسب است. دو استراتژی مهم بیان شده در [۶]، راهبرد جستجوی خطی^{۲۱} و ناحیه مطمئن^{۲۲} است.

در جستجوی خطی در هر تکرار ابتدا یک امتداد جستجو \mathbf{p}_k تعیین و سپس طول گام α_k مشخص می‌شود. امتداد کاهشی معمولاً دارای شکل $\mathbf{p}_k = -\mathbf{S}_k^{-1} \nabla J_k$ است. چنانچه $\mathbf{S}_k = \mathbf{I}$ ، در این صورت تندترین کاهش و چنانچه $\mathbf{S}_k = \nabla^2 J_k$ باشد، روش نیوتن که همان فرم تکرارشونده رابطه (۹) است، برقرار می‌گردد. انتخاب طول گام مناسب نیز از حل دقیق مسئله مینیمم‌سازی (۱۰) حاصل می‌شود [۶].

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} J(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k). \quad (10)$$

روش گوس-نیوتن باهدف کاهش حجم محاسبات، ماتریس هسین موجود در (۹) را، بر حسب ژاکوبین \mathbf{G} به صورت رابطه (۱۱) بازنویسی نموده و دیگر نیازی به محاسبه مشتقات مرتبه دوم ندارد [۶].

$$\mathbf{H}^{-1} \approx 2(\mathbf{G}^T(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad (11)$$

که در آن ژاکوبین به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial d_{t,1}}{\partial x} \\ \frac{\partial d_{1,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial d_{t,1}}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \quad (12)$$

و $d_{t,1}$ از رابطه (۱) به دست می‌آید. روش‌های نیوتن و گوس-

²¹ Linear Search

²² Trust Region

گردند، در این صورت ماتریس هسین $\mathbf{H}_{k+1} = \nabla^2 J_k$ باید به گونه‌ای تخمین زده شود که در معادله سکانت (۲۵) یا همان تقریب خطی هسین تابع صدق نماید.

$$\mathbf{H}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k. \quad (25)$$

با تعریف \mathbf{B}_k به عنوان وارون ماتریس هسین \mathbf{H}_k به صورت زیر:

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{H}_k^{-1} \quad (26)$$

یک روش برای تخمین \mathbf{B}_{k+1} از روی \mathbf{B}_k ، با فرض مثبت معین بودن \mathbf{B} حل مسئله بهینه‌سازی مقید (۲۷) است.

$$\min_{\mathbf{B}} \|\mathbf{B} - \mathbf{B}_k\|_{\mathbf{W}} \quad (27)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{B} = \mathbf{B}^T, \quad \mathbf{B} \mathbf{y}_k = \mathbf{s}_k$$

روش BFGS^{۲۶} با فرض $\mathbf{W} = \overline{\mathbf{M}}_k$ ، که $\overline{\mathbf{M}}_k$ متوسط ماتریس هسین است، تخمین \mathbf{B}_{k+1} را به فرم (۲۸) ارائه می‌دهد [۶].

$$\mathbf{B}_{k+1} = (\mathbf{I} - \beta_k \mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T) \mathbf{B}_k (\mathbf{I} - \beta_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T) + \beta_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T, \quad (28)$$

که $\beta_k = \frac{1}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}$ استفاده از (۲۸) نه تنها روش تکرارشونده

بر پایه (۹) را از محاسبه وارون ماتریس هسین بی‌نیاز می‌سازد بلکه این ماتریس حتی اگر مقدار واقعی هسین تابع هزینه در آن نقطه مثبت معین نباشد، به صورت مثبت معین تخمین زده می‌شود. در این قسمت مقدار اولیه ماتریس هسین را به صورت $\mathbf{B}_0 = (\nabla^2 J_0)^{-1}$ در نظر می‌گیریم. سپس کوچک‌ترین مقدار ویژه آن را تخمین زده و در صورت منفی و یا نزدیک صفر شدن، یک عدد مثبت به قطر اصلی \mathbf{B}_0 به گونه‌ای اضافه می‌نماییم که کوچک‌ترین مقدار ویژه را یک کند. این امر با توجه به (۱۴) باعث کاهش تعداد گام و افزایش سرعت همگرایی روش پیشنهادی می‌شود. لازم به ذکر است افزایش اندازه مقادیر ویژه باعث ایجاد بایاس در تخمین می‌گردد. در جدول ۱ شبه کد پیاده‌سازی روش پیشنهادی با استفاده از جستجوی خطی ارائه شده است. در اینجا به جای استفاده از جستجوی دقیق (۱۰) برای افزایش سرعت از شرط ولف به صورت زیر بهره می‌بریم.

$$J(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) \leq J(\mathbf{x}_k) + c_1 \alpha \nabla J^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}_k \quad (29)$$

&

$$\nabla J^T(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) \mathbf{p}_k \geq c_2 \nabla J^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}_k,$$

که در آن $c_1 = 10^{-4}$ و $c_2 = 0.9$ در نظر گرفته می‌شود [۶].

البته شرط وجود $\hat{\mathbf{u}}$ ، وارون پذیری و مثبت معین بودن $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ است. در نهایت تخمین موقعیت فرستنده به فرم (۲۰) هست [۴].

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{u}}]_1 + x_1, [\hat{\mathbf{u}}]_2 + y_1, [\hat{\mathbf{u}}]_3 + z_1]^T, \quad (20)$$

که $[\hat{\mathbf{u}}]_i$ اشاره به درایه i ام $\hat{\mathbf{u}}$ دارد. به عنوان یک روش اصلاح خطی شده می‌توان به LCLS اشاره نمود. این روش تابع هزینه (۱۸) و قید غیرخطی (۲۱) را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، به یک مسئله بهینه‌سازی غیر مقید تبدیل می‌نماید [۵].

$$\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} = 0, \quad (21)$$

که در آن $\Sigma = \text{diag}(\mathbf{I}_{1 \times D}, -1)$ است. این قید مجموعه نقاط شدنی را به نقاطی که فاصله تخمین زده شده آن‌ها تا مبدأ مختصات برابر با فاصله تخمین زده شده هدف تا گیرنده مرجع (واقع در مبدأ مختصات) است، محدود می‌نماید. و در نهایت یک تخمین دوم مرحله‌ای به فرم (۲۲) ارائه می‌دهد.

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = [\mathbf{I} + \lambda (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \Sigma]^{-1} \hat{\mathbf{u}}_1, \quad (22)$$

که $\hat{\mathbf{u}}_1$ همان تخمین (۱۹) است. این دسته از روش‌ها با چالش بدحالتی^{۲۳} روبرو هستند. در تخمین (۲۲) نیز همان طور که برای (۱۹) اشاره شد، وجود تخمین منوط به مثبت معین بودن $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ است. در روش‌های تکرارشونده مانند تیخونوف^{۲۴} و LM تا حد زیادی با بدحالتی مقابله می‌شود و تخمین‌هایی با واریانس کمتر اما با بایاس ارائه می‌گردد [۹].

۴- روش پیشنهادی

در این بخش روشی ارائه می‌شود، که وارون ماتریس هسین تابع هزینه حداقل مربعات غیرخطی (۴) را در هر گام به صورت یک ماتریس مثبت معین تخمین می‌زند و دارای همگرایی فوق خطی است. می‌گوییم که نرخ همگرایی فوق خطی^{۲۵} است در صورتی که رابطه زیر برقرار باشد [۶].

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}\|} = 0. \quad (23)$$

از [۱۰] تقریب (۲۴) را داریم.

$$\nabla^2 J_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \approx \nabla J_{k+1} - \nabla J_k. \quad (24)$$

چنانچه $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ و $\mathbf{y}_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$ تعریف

²³ Ill condition

²⁴ Tikhonov

²⁵ Superlinear

²⁶ Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

نقطه اولیه \mathbf{x}_0 و سطوح آستانه η و ε را بگیر.

مقدار اولیه \mathbf{B}_0 را به صورت $\mathbf{B}_0 = (\nabla^2 J_0)^{-1}$ در نظر بگیر

If $\lambda_{\min}(\mathbf{B}_0) \leq \varepsilon$

$\mathbf{B}_0 \leftarrow \mathbf{B}_0 + \mu \times eye(D)$

$k \leftarrow 0$;

While $\|\nabla J_k\| > \varepsilon$ && $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \eta$

Do $\mathbf{p}_k = -\mathbf{B}_k \nabla J_k$

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$

که α_k از روش پیمایش معکوس و شرط ولف به دست می‌آید.

$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$

$\beta_k = \frac{1}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}$

$\mathbf{B}_{k+1} = (\mathbf{I} - \beta_k \mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T) \mathbf{B}_k (\mathbf{I} - \beta_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T) + \beta_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T$

$k \leftarrow k + 1$;

End while

نقطه \mathbf{x} به اندازه کافی نرم باشند، رابطه (۳۱) برقرار است [۱۱].

$$\mathbf{B}(J(\mathbf{x})) \approx E\{\mathbf{B}(J(\mathbf{x}))\}, \quad (31)$$

که E امید ریاضی است. با توجه به رابطه (۳۱) و استفاده از رابطه (۹) متوسط تخمین از رابطه (۳۲) به دست می‌آید.

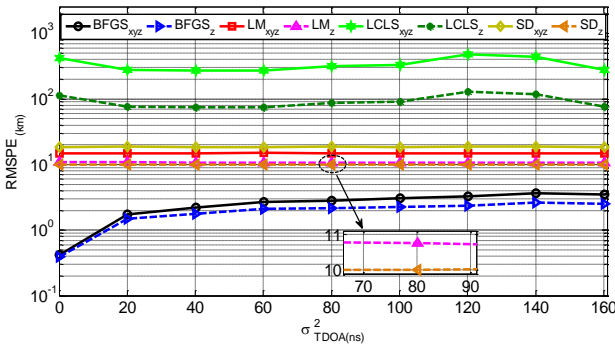
$$E\{\hat{\mathbf{x}}\} \approx \mathbf{x} - [E\{\mathbf{B}(J(\mathbf{x}))\}]^{-1} E\{\nabla(J(\mathbf{x}))\}. \quad (32)$$

همچنین کواریانس تخمین نیز از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود.

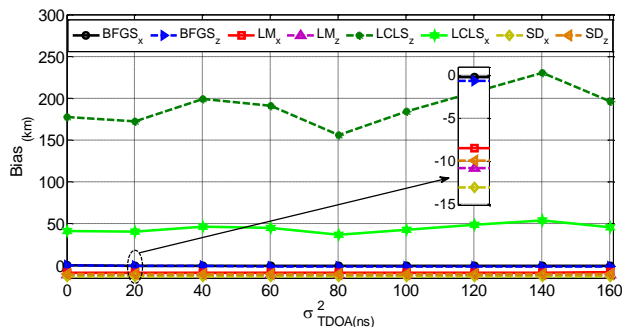
$$\mathbf{C} = E\{(\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\})(\hat{\mathbf{x}} - E\{\hat{\mathbf{x}}\})^T\}. \quad (33)$$

شکل ۲ مقادیر بایاس و شکل ۳ واریانس تخمین \mathbf{x} برای روش‌های بیان شده را برحسب مقادیر مختلف خطای محاسبه TDOA که به صورت واریانس σ_{TDOA}^2 بیان شده است ارائه می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی برپایه BFGS تقریباً بدون بایاس است و واریانس آن از LM بهتر است.

این امر اثباتی بر مقاومت این روش در برابر بدحالی است.



شکل ۱: مقایسه RMSPE برای روش ۴ و حالت تخمین موقعیت هدف (xyz) و تخمین ارتفاع هدف (z) که به صورت زیرنویس متمایز گردیده‌اند، برحسب σ_{TDOA}^2 .



شکل ۲: مقایسه بایاس تخمین موقعیت فرستنده برای روش ۴ و حالت تخمین مولفه اول موقعیت هدف (x) و تخمین ارتفاع هدف (z) که به صورت زیرنویس متمایز گردیده‌اند، برحسب σ_{TDOA}^2 .

با صرف نظر از روش LCLS به دلیل خطای بالای آن، جدول ۲ به عنوان نمایشی از عملکرد روش‌ها به ازای $\sigma_{\text{TDOA}}^2 = 100 \text{ ns}$ ارائه گردید. همان‌طور که در این جدول نیز مشخص است، روش پیشنهادی از لحاظ سرعت و دقت، عملکرد مناسبی دارد.

بیان این نکته ضروری است که حتی با فرض در اختیار بودن

۵- شبیه‌سازی و بررسی عملکرد روش پیشنهادی

در این قسمت با فرض به کارگیری ۴ گیرنده با چیدمان Y و تعریف سناریویی بر اساس قرارگیری فرستنده در مختصات $\mathbf{x} = [85, 57, 2]$ و گیرنده‌ها در مختصات $\mathbf{x}_1 = [0, 0, 0.2]$ ، $\mathbf{x}_2 = [0, 16, 0]$ ، $\mathbf{x}_3 = [-13.85, -8, 0]$ ، $\mathbf{x}_4 = [13.85, -8, 0]$ و نقطه اولیه از LLS به صورت $\mathbf{x}_0 = [100, 80, 5]$ به مقایسه تخمین صورت گرفته توسط روش نیوتن مبتنی بر BFGS بهبودیافته با روش‌های بیان شده در بخش ۳ پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است واحدها در این بخش برحسب کیلومتر و نانوثانیه در نظر گرفته شده‌اند. همچنین در شبیه‌سازی‌ها حالت‌های تخمین موقعیت فرستنده $[x, y, z]$ ، تخمین ارتفاع (z) و تخمین مولفه اول موقعیت فرستنده (x) برای روش‌ها در نظر گرفته شده و به صورت زیرنویس‌های xyz و z و x نمایش داده می‌شود. شکل ۱ نمایشی از عملکرد هریک از روش‌ها را بر اساس معیار RMSPE^{27} و برحسب مقادیر مختلف خطای محاسبه TDOA که به صورت واریانس σ_{TDOA}^2 بیان شده است ارائه می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد روش پیشنهادی دارای کمترین مقدار خطا است. قابل ذکر اینکه RMSPE به صورت رابطه (۳۰) محاسبه می‌گردد که در آن $L=1000$ است.

$$\text{RMSPE} = \sqrt{E \left[\sum_{i=1}^L (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)^2 \right]}. \quad (30)$$

هنگامی که مشتق‌های مرتبه دوم ماتریس هسین در نزدیکی

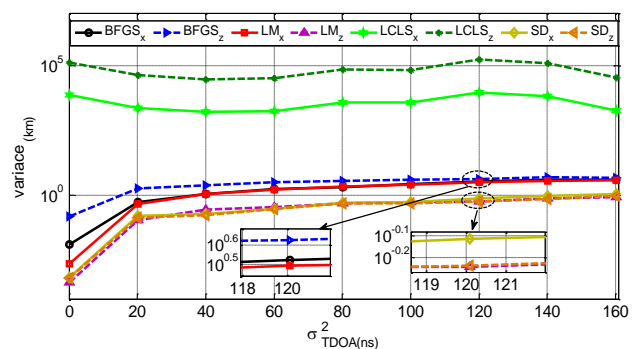
²⁷ Root Mean Square Position Error

برای هر گام [۶] و بدون نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه دوم برای هر گام، قابلیت کاربرد بلا درنگ را داراست.

۷- مراجع

- [۱] R. G. Wiley and I. ebrary, *ELINT: The Interception and Analysis of Radar Signals*: Boston: Artech House, 2006.
- [۲] E. Cetin, R. R. Thompson, and A. Dempster, "Passive interference localization within the GNSS environmental monitoring system (GEMS): TDOA aspects," *GPS Solutions*, vol. 18, pp. 483-495, 2014/10/01 2014.
- [۳] D. J. Torrieri, "Statistical Theory of Passive Location Systems," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. AES-20, pp. 183-198, 1984.
- [۴] J. O. Smith and J. S. Abel, "Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 35, pp. 1661-1669, 1987.
- [۵] K. W. Cheung, H. C. So, W.-K. Ma, and Y. T. Chan, "A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality," *EURASIP J. Appl. Signal Process.*, vol. 2006, pp. 150-150, 2006.
- [۶] J. Nocedal and S. J. Wright, "Numerical Optimization, Second Edition," *Numerical optimization*, pp. 497-528, 2006.
- [۷] L. W. Meng YE, Yu JIANG, Shengdong XIE, "Localization Algorithm Based on Nonlinear Least Square Principle," *Journal of Computational Information Systems*, vol. 10, pp. 6033- 6039 2014.
- [۸] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*: Cambridge university press, 2004.
- [۹] I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, and J. V. Balbastre-Tejedor, "Time-difference-of-arrival regularised location estimator for multilateration systems," *Radar, Sonar & Navigation, IET*, vol. 8, pp. 479-489, 2014.
- [۱۰] E. Dong, "A three-dimensional localization algorithm for wireless sensor networks based on the BFGS optimization," in *Wireless Conference 2011-Sustainable Wireless Technologies (European Wireless), 11th European*, 2011, pp. 1-5.
- [۱۱] V. H. MacDonald and P. M. Schultheiss, "Optimum Passive Bearing Estimation in a Spatially Incoherent Noise Environment," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 46, pp. 37-43, 1969.

ماتریس کواریانس نویز، به دلیل مستطیلی بودن ماتریس A به از



شکل ۳: مقایسه واریانس تخمین موقعیت فرستنده برای روش ۴ و روش ۲ حالت تخمین مولفه اول موقعیت هدف (x) و تخمین ارتفاع هدف (z) که به صورت زیرنویس متمایز گردیده‌اند، برحسب σ_{TDOA}^2 .

۴ گیرنده در مکان یابی ۳ بعدی وجود و یکتایی جواب به‌طور هم‌زمان در روش‌های مبتنی بر LLS امکان‌پذیر نبوده و حداقل به ۵ گیرنده نیاز است. علت تعداد تکرار بیشتر روش لونبرگ-مارکارد در جدول ۲ را می‌توان بزرگ‌شدن مقادیر ویژه عنوان کرد که خود سبب افزایش خطای گرد کردن و کاهش دقت تخمین موقعیت می‌شود. علت خطای بیشتر روش SD را می‌توان در ۴ شرط توقف اعمال‌شده جستجو نمود، برای عملی کردن روش‌ها از ۳ شرط کران‌دار کردن فاصله دو گام، فاصله دو افت پیایی بر روی تابع هزینه و همچنین تعداد محاسبه تابع استفاده‌شده است. محدودیت آخر با توجه به نامحدود بودن تابع هزینه سبب این میزان خطا در تخمین موقعیت توسط SD می‌گردد.

جدول ۲: ارزیابی روش‌ها برحسب تعداد گام، بهینگی مرتبه اول، RMSPE و درصد خطای مکان‌یابی (٪) برای $\sigma_{TDOA}^2 = 100ns^2$

نام روش	تعداد گام	$\ \nabla J\ _\infty$	RMSPE _{km}	٪
روش پیشنهادی	۲۵	$1.72e-7$	۳.۰۴۶	۲.۳۸
SD	۶۴	۰.۰۳۵۸	۱۸.۶۲	۱۴.۵۳
LM	۱۳۰	۰.۰۲۲	۱۴.۸۵	۱۱.۵۹

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه محدودیت‌های موجود در ESM برای تخمین آمارگان‌های نویز TDOA در مکان‌یابی پس‌یو و با استفاده از حداقل تعداد آنتن موردنیاز برای فضای سه‌بعدی که ۴ عدد است، نقاط قوت و ضعف روش‌هایی که بدون نیاز به ماتریس کواریانس نویز اقدام به مکان‌یابی می‌نمایند، بررسی گردید و بر اساس نقاط ضعف این روش‌ها با حفظ نقاط قوت، روشی برپایه تخمین مثبت معین وارون ماتریس هسین (۸) ارائه شد. روش پیشنهادی با همگرایی فوق خطی، مرتبه پیچیدگی $O(n^2)$