

طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای زمان پیوسته

روزبه سلیمی طاری^۱، علی معرفیان پور^۲

دانشجوی کارشناسی ارشد، برق کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، kurosh_st@yahoo.com

عضو هیات علمی گروه برق کنترل، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، moarefian@srbiau.ac.ir

چکیده

در این مقاله، روش طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. قانون کنترل پسخور خروجی بر اساس ساختار رویتگر و کنترلگر در نظر گرفته شده است. شرایط پایداری و کارایی سیستم حلقه بسته با تضمین شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت در قالب مجموع مربعات استخراج خواهد شد. روش ارائه شده تعمیم روش طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم‌های فازی سوگنو است. شبیه سازی‌های انجام شده کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی

سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، قانون کنترل تعقیب، رویتگر، کنترلگر، مجموع مربعات، نرم بی‌نهایت

فازی، شرایط لازم برای به دست آوردن قانون کنترلی برای تعقیب به دست می آید.

در مرجع [۵] یک روش برای طراحی قانون کنترل فازی برای سیستم‌های غیرخطی با تضمین شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت بررسی شده است. برای کاهش خطای تعقیب یک رویکرد فازی به همراه یک کنترلگر فازی برای سیستم اصلی طراحی شده است. شرایط به دست آمده در این طراحی بر اساس نامساوی ماتریس خطی ارائه شده است. در مرجع [۶] طراحی قانون کنترل فازی برای سیستم‌های زمان گسسته غیرخطی همراه با تاخیر زمانی بررسی شده است. در واقع روش موجود در مرجع [۶] مشابه روش ارائه شده در مرجع [۵] است با این تفاوت که برای سیستم‌های زمان گسسته همراه با تاخیر زمانی بررسی شده است.

در مقاله حاضر روش ارائه شده در [۵] برای طراحی قانون کنترل فازی چندجمله‌ای تعمیم داده شده است. شرایط ارائه شده برای تضمین پایداری و کارایی سیستم حلقه بسته در قضیه اول مشابه ولی در ادامه متفاوت از روش [۵] می باشد. بعلاوه با توجه به اینکه شرایط استخراج شده برای استخراج بهره کنترلگر و رویکرد در حالت کلی غیر محذب هستند ضمن نقد روش ارائه شده در [۵] و بیان نواقص آن اصلاح شده است.

در فصل دوم مقدمات ریاضی و تعریف مساله ارائه شده است. در فصل سوم قضایای لازم برای طراحی قانون کنترل و طراحی رویکرد فازی چندجمله‌ای ارائه شده است. در فصل چهارم با استفاده از شبیه سازی کارایی روش نشان داده شده است. فصل پنجم نیز به جمع بندی و نتیجه گیری از بحث اختصاص دارد.

۲ - مقدمات و تعریف مساله

۲-۱- مقدمات ریاضی

تابع تک جمله‌ای از $x(t)$ تابعی است که فقط دارای یک جمله از متغیر $x(t)$ باشد. تابع تک جمله‌ای می‌تواند یک عدد، یک متغیر یا حاصلضرب یک یا چند عدد در یک متغیر باشد و به صورت $\beta(x(t))^\alpha$ می‌باشد که در آن α, β عدد هستند. تابع چندجمله‌ای $f(x(t))$ تابعی است که حاصل جمع چند تابع تک جمله‌ای از $x(t)$ باشد. تابع چندجمله‌ای $f(x(t))$ مجموع مربعات است اگر چندجمله‌ای‌های $f_1(x(t)), \dots, f_k(x(t))$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که $f(x(t)) = \sum_{i=1}^k f_i^2(x(t))$. مجموع مربع بودن تابع $f(x(t))$ به این معناست که برای $x(t) \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $f(x(t)) \geq 0$ یک سیستم غیرخطی را به صورت

(۱)

در نظر بگیرید که در آن f یک تابع غیرخطی است به گونه‌ای که $f(0,0) = 0$. $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ بردار حالت، $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_n(t)]^T$ بردار ورودی و

مدل فازی تاکاگی-سوگنو در چند سال اخیر بعد از به کارگیری مدل نامساوی ماتریس خطی مورد توجه بسیار قرار گرفته است و تا کنون تحقیقات فراوانی به ویژه پیرامون به کارگیری روش نامساوی ماتریس خطی در زمینه‌های گوناگونی از کنترل بهینه و کنترل مقاوم تا کنترل غیرخطی صورت گرفته است. به طور کلی روش کنترل بر اساس مدل فازی، روشی بسیار ساده و موثر را به عنوان مکمل برای دیگر روش‌های کنترل غیر خطی ارائه می‌دهد. اگرچه روش کنترل بر اساس نامساوی ماتریس خطی برای مدل فازی تاکاگی-سوگنو روشی کارا و موثر است، اما بسیاری از مسائل طراحی به وسیله نامساوی ماتریس خطی قابل بیان نیستند.

در سالهای اخیر دسته دیگری از سیستم‌های فازی توسعه داده شده است که در مدل سازی سیستم‌های غیرخطی عمومیت بیشتری نسبت به سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو دارند. این کلاس سیستم‌ها به سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مشهور هستند. تفاوت اصلی این دسته از سیستم‌ها با سیستم‌های فازی تاکاگی سوگنو این است که زیر سیستم‌های خطی موجود در بخش تالی قواعد سیستم‌های تاکاگی-سوگنو به زیر سیستم‌های چندجمله‌ای وابسته به حالت‌های سیستم تبدیل شده اند [۱].

فعالیت‌های مختلفی در خصوص تحلیل سیستم‌های فازی چندجمله‌ای انجام شده است. از آن جمله می‌توان به [۱] اشاره کرد. عمل پایداری و تعقیب دو هدف اصلی برای مسائل کنترلی هستند که عمل تعقیب از جهاتی مشکلتر از پایداری است. روش‌های مختلفی برای طراحی قانون کنترل تعقیب خروجی در مراجع یافت می‌شود که از آنجمله می‌توان به طراحی رویکرد-کنترلگر اشاره کرد.

در خصوص طراحی رویکرد برای پایداری سیستم‌های فازی چندجمله‌ای فعالیت‌هایی انجام شده است از آنجمله می‌توان به مرجع [۲] اشاره کرد. در این مرجع رویکرد فازی چندجمله‌ای برای سه کلاس از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که ذکر شد نتایج مطالعه [۲] فقط اختصاص به پایداری سیستم داشته و قابل استفاده در مساله تعقیب نیستند.

در خصوص طراحی رویکرد برای سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو مطالعات مختلفی دیده می‌شود. بررسی این مطالعات امکان توسعه روش‌های مذکور را به سیستم‌های فازی چندجمله‌ای فراهم می‌کند. در مرجع [۳] یک کنترلگر و رویکرد فازی برای کاهش خطای تعقیب طراحی شده است در این مقاله از معیار نرم بی‌نهایت برای طراحی بهره رویکرد استفاده شده است. در مرجع [۴] مساله کنترل تعقیب مدل مرجع برای سیستم‌های فازی زمان گسسته همراه با اغتشاش خارجی معرفی شده که برای کاهش اثر اغتشاش مانند مرجع [۳] از معیار نرم بی‌نهایت استفاده شده است. در این مقاله بر اساس توابع لیپانوف

رابطه (۵) زمان پایانی کنترل، Q ماتریس وزن مثبت معین و ρ میزان تضعیف است.

رابطه (۵) از لحاظ عملی به این مفهوم می‌باشد که اثر ورودی $\tilde{w}(t)$ بر روی خطای تعقیب $x(t) - x_r(t)$ باید از نقطه نظر انرژی کمتر از سطح تعیین شده ρ باشد. عبارتی، بهره L_2 از $\tilde{w}(t)$ تا خطای $x(t) - x_r(t)$ باید برابر یا کمتر از میزان بهره تضعیف ρ باشد.

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) \{A_i(\hat{x})x + B_i(x)u\} + L_i(\hat{x})(y - \hat{y}) \quad (6)$$

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i \hat{x}$$

استفاده می‌کنیم.

خطای تخمین به صورت اختلاف حالات سیستم اصلی از حالات رویتگر است. از این خطای تخمین مشتق گرفته می‌شود

$$e = x - \hat{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = & \sum_{i=1}^r h_i(z) \sum_{j=1}^r h_j(z) [A_i(x)x(t) \\ & + B_i(x)u(t) + \omega(t)] - \\ & [A_i(\hat{x})x + B_i(x)u + L_i(\hat{x})C_j(x - \hat{x}) \\ & + L_i(\hat{x})\vartheta(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{i=1}^r h_i(z) \sum_{j=1}^r h_j(z) [(A_i(\hat{x}) - L_i(\hat{x})C_j)e \\ & + (A_i(x) - A_i(\hat{x}))x \\ & - L_i(\hat{x})\vartheta(t)] \end{aligned}$$

۳ - طراحی قانون کنترلی تعقیب

برای پایدارسازی و تعقیب سیستم کنترلی (۳) قانون کنترلی به صورت

$$u = \sum_{j=1}^r h_j(z) [K_j(\hat{x})(\hat{x} - x_r)] \quad (8)$$

در نظر گرفته می‌شود. همانطور که بیان شد هدف اصلی در این مقاله کاهش خطای تعقیب است، بنابراین در قانون کنترلی (۸)، ترم اختلاف بین حالات رویتگر از حالات مدل مرجع $\hat{x} - x_r$ قرار داده شده تا با پایدارسازی سیستم توسط قانون کنترلی (۸)، تا حد امکان به کاهش خطای تعقیب ورودی مدل مرجع توسط خروجی سیستم کمک شود. ذکر این نکته ضروری است که چون ممکن است حالات اصلی سیستم x در دسترس نباشند بنابراین در قانون کنترلی (۸) از حالات رویتگر \hat{x} استفاده شده است. قانون کنترلی (۸) شبیه به قانون کنترلی ارائه شده در مرجع [۵] است با این تفاوت که در (۸) ضریب K_j یک

$\omega(t) = [\omega_1(t) \ \omega_2(t) \ \dots \ \omega_n(t)]^T$ اغتشاش خارجی است.

معادله (۱) طبق مرجع [۹] با استفاده از غیرخطی گری قطاعی می‌توان به صورت مدل فازی چندجمله‌ای

$$\text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \quad (2)$$

then $\dot{x}(t) = A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t) + \omega(t)$
که در آن $i = 1, 2, \dots, r$ است. r نشاندهنده تعداد قوانین است. تابع عضویت مربوط به i امین قانون مدل و j امین متغیر مقدم با M_{ij} مشخص می‌شود. هر $Z_j(t)$ یک مقدار متغیر با زمان است که می‌تواند هر کدام از حالات، متغیر قابل اندازه‌گیری خارج از سیستم و یا زمان باشد. $\omega(t)$ اغتشاش خارجی است، $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ چندجمله‌ای از $x(t)$ هستند. بنابراین $A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t) + \omega(t)$ یک بردار چندجمله‌ای می‌باشد. در نتیجه مدل فازی چندجمله‌ای (۲) در بخش تالی دارای یک چندجمله‌ای می‌باشد.

معادله ریاضی سیستم فازی چندجمله‌ای (۲) به صورت:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i(x(t))x(t) \\ & + B_i(x(t))u(t)\} + \omega(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$y = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + \vartheta(t)$$

قابل توصیف است.

۲ تعریف مسأله

مدل مرجع

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \quad (4)$$

را در نظر بگیرید که در آن A_r ، B_r ماتریس‌های سیستم مدل مرجع و $r(t)$ ورودی مرجع است. توجه به این نکته لازم است که در مرجع [۵] ماتریس B_r به صورت واحد در نظر گرفته شده، اما در اینجا حالت کلی‌تری در نظر گرفته می‌شود.

شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت مرتبط با خطای تعقیب $x(t) - x_r(t)$ طبق مرجع [۵] به صورت

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \{[x(t) - x_r(t)]^T Q [x(t) - x_r(t)]\} dt \\ & \leq \rho^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

است که در آن $\tilde{w}(t) = [\vartheta(t)\omega(t)r(t)]^T$ و ورودی مرجع، $\omega(t)$ اغتشاش خارجی، $\vartheta(t)$ نویز اندازه‌گیری هستند. در

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}(x, \hat{x})\tilde{P}(x) + \tilde{P}(x)\tilde{A}_{ij}(x, \hat{x}) \\ + \frac{1}{\rho^2}\tilde{P}(x)\tilde{E}_i(\hat{x})\tilde{E}_i(\hat{x})^T\tilde{P}(x) + \tilde{Q} \quad (11) \\ \leq 0 \end{aligned}$$

باشد، برای $i, j = 1, 2, \dots, L$ ، $h_i(z)h_j(z) \neq 0$ ، آنگاه شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت (۱۰) برای میزان بهره تضعیف ρ تضمین شده است. در (۱۴) ماتریس‌های $\tilde{E}_i, \tilde{A}_{ij}$ می‌توانند به فرم چندجمله‌ای باشند. به دلیل آنکه ماتریس‌های به کار رفته شده در اینجا به صورت چندجمله‌ای هستند بنابراین باید به صورت مجموع مربعات نوشته شوند.

اثبات: اثبات: برای اثبات به مرجع [۵] مراجعه شود. با این تفاوت که ماتریس‌های به کار رفته شده در این مقاله به صورت چندجمله‌ای هستند.

برای سهولت در طراحی، فرض می‌کنیم:

$$\tilde{P}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{P}_{33}(x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۱) می‌توان نشان داد

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ 0 & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

که در آن

$$\begin{aligned} S_{11} = & (A_i(\hat{x}) - L_i(\hat{x})C_j)^T \tilde{P}_{11}(x) + \tilde{P}_{11}(x)(A_i(\hat{x}) \\ & - L_i(\hat{x})C_j) \\ & + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{11}(x)(L_i(\hat{x})L_i(\hat{x})^T + I)\tilde{P}_{11}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{21}^T = & -(B_iK_j(\hat{x}))^T \tilde{P}_{22}(x) \\ & + \tilde{P}_{11}(x)(A_i(x) - A_i(\hat{x})) \\ & + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{11}(x)\tilde{P}_{22}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{22} = & (A_i(x) + B_i(x)K_j(\hat{x}))^T \tilde{P}_{22} \\ & + \tilde{P}_{22}(x)(A_i(x) + B_i(x)K_j(\hat{x})) \\ & + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{22}(x)\tilde{P}_{22}(x) + Q \end{aligned}$$

$$S_{23} = S_{32}^T = -\tilde{P}_{22}(x)B_i(x)K_j(\hat{x}) - Q$$

$$\begin{aligned} S_{33} = & A_r^T \tilde{P}_{33}(x) + \tilde{P}_{33}(x)A_r + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{33}(x)B_rB_r^T \tilde{P}_{33}(x) \\ & + Q \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $Z_i = \tilde{P}_{11}L_i(\hat{x})$ داریم

ماتریس چندجمله‌ای از حالات رویتر باشد، یعنی حالت کلی‌تری را شامل می‌شود.

طبق مرجع [۵] نیاز به یک سیستم افزوده شده است که در آن خطای تخمین (۷) و مدل مرجع (۴) توسط قانون کنترل (۸) پایدار شود تا ضمن پایداری سیستم و کاهش خطای تخمین، خطای تعقیب نیز به حداقل برسد. بنابراین با جایگذاری قانون کنترلی (۸) به جای u و با به کارگیری خطای تخمین (۷) و مدل مرجع (۴) سیستم افزوده شده

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) \sum_{j=1}^r h_j(z) [\tilde{A}_{ij}\hat{x} + \tilde{E}_i\tilde{\omega}] \quad (9)$$

نتیجه گرفته می‌شود که در آن

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i(\hat{x}) - L_i(\hat{x})C_j & A_i(x) - A_i(\hat{x}) & 0 \\ -B_i(x)K_j & A_i(x) + B_i(x)K_j & -B_i(x)K_j \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} e \\ x \\ x_r \end{bmatrix}, \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \omega \\ r \end{bmatrix}, \tilde{E} = \begin{bmatrix} -L_i(\hat{x}) & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & B_r \end{bmatrix}$$

با توجه به آنکه در این مقاله ماتریس سیستم A_i چندجمله‌ای و وابسته به حالات x در نظر گرفته می‌شود بنابراین ماتریس \tilde{A}_{ij} به دست آمده در این مقاله با آنچه در مرجع [۵] به دست می‌آید متفاوت است.

شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت (۹) به صورت

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \{[x - x_r]^T Q [x - x_r]\} dt \\ & = \int_0^{t_f} \{\tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x}\} dt \quad (10) \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{x}^T(0)\tilde{P}\tilde{x}(0) + \rho^2 \int_0^{t_f} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} dt$$

به دست می‌آید که در آن \tilde{P} یک ماتریس وزن متقارن مثبت معین

می‌باشد و

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & -Q \\ 0 & -Q & Q \end{bmatrix}$$

هدف اصلی در این مقاله تعیین کنترلگر فازی چندجمله‌ای (۸)

برای سیستم افزوده شده (۹) با تضمین شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت برای تمامی $\tilde{\omega}$ ها می‌باشد. پس از آن میزان بهره تضعیف ρ می‌تواند کمینه شود تا شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت در (۱۰) تا حد ممکن کوچک شود.

قضیه ۱: در سیستم غیر خطی (۹) اگر $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ جواب

نامساوی ماتریسی

پارامترهای در اختیار طراحی تعبیر کرده و به صورت دستی انتخاب می شود.

۴ - شبیه سازی

۴-۱ مثال شبیه سازی ۱

سیستم غیرخطی را که در مرجع [۵] به آن اشاره شده در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 - 0.3x_2 + (x_1^2 + 1)u(t) \\ \dot{x}_2 = -1.5x_1 - 2x_2 - x_2^3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۱۶)$$

می توان با استفاده از روش غیرخطی گری قطعی^a یک مدل فازی چندجمله ای با دو قاعده بدست آورد به گونه ای که به طور دقیق سیستم را توصیف کند. ماتریس های سیستم فازی چندجمله ای بدست آمده به صورت زیر خواند بود.

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} -0.2172 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1(x) = B_2(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(z) = \frac{\sin y + 0.21727}{1.2172y}$$

$$h_2(z) = \frac{y - \sin y}{1.2172y}$$

با انتخاب مدل مرجع به صورت

$$A_r = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ -1.5 & -3 \end{bmatrix} \quad B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_r = [1 \quad 0]$$

با استفاده از جعبه ابزار یالمیپ^{cb} در متلب، پارامترهای مسئله را به دست می آیند

$$\tilde{P}_{11} = 10^4 \begin{bmatrix} 1.9884 & -0.0004 \\ -0.0007 & 0.0023 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{22} = \begin{bmatrix} 10.08 & 0 \\ 0 & 3.564 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{33} = 10^6 \begin{bmatrix} 1.5134 & 0.4054 \\ 0.4054 & 1.44 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = K_2 [-4.5679 \quad 0.0937]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 69.4129 \\ -1.5001 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 66.0492 \\ -6.1496 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}^* & \tilde{P}_{11} & Z_i & M_{41}^{*T} & 0 & 0 \\ \tilde{P}_{11} & -\rho^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_i^T & 0 & -\rho^2 I & 0 & 0 & 0 \\ M_{41}^* & 0 & 0 & M_{44}^* & M_{45}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{45}^{*T} & M_{55}^* & \tilde{P}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{P}_{33} & -\rho^2 I \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$< 0$$

که در آن

$$M_{11}^* = A_i(\hat{x})^T \tilde{P}_{11}(x) + \tilde{P}_{11}(x) A_i(\hat{x}) - Z_i(x, \hat{x}) C_j^T - Z_i(x, \hat{x}) C_j^T$$

$$M_{41}^* = (A_i(x) - A_i(\hat{x}))^T \tilde{P}_{11}(x) - \tilde{P}_{22}(x) B_i(x) K_j(\hat{x}) + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{11}(x) \tilde{P}_{22}(x)$$

$$M_{44}^* = (A_i(x) + B_i(x) K_j(\hat{x}))^T \tilde{P}_{22}(x) + \tilde{P}_{22}(x) (A_i(x) + B_i(x) K_j(\hat{x})) + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{22}(x) \tilde{P}_{22}(x) + Q$$

$$M_{45}^* = -\tilde{P}_{22}(x) B_i(x) K_j(\hat{x}) - Q$$

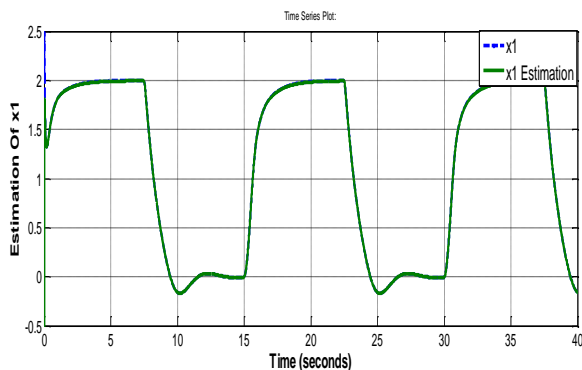
$$M_{55}^* = A_r^T \tilde{P}_{33}(x) + \tilde{P}_{33}(x) A_r + Q$$

باید توجه داشت که رابطه (۱۴)، مجموع مربعات نیست چون به صورت غیر محدب ظاهر شده است. در رابطه (۱۴)، پنج مجهول $\tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{22}, \tilde{P}_{33}, K_j, L_i$ وجود دارد که این پارامترها از رابطه (۱۴) به تنهایی قابل محاسبه نیستند. در مرجع [۵] برای رفع این مشکل و حل رابطه نامساوی ماتریس خطی به این صورت عمل کرده که شرط لازم برای برقراری رابطه (۱۴) اینست که $M_{44}^* < 0$ بنابراین

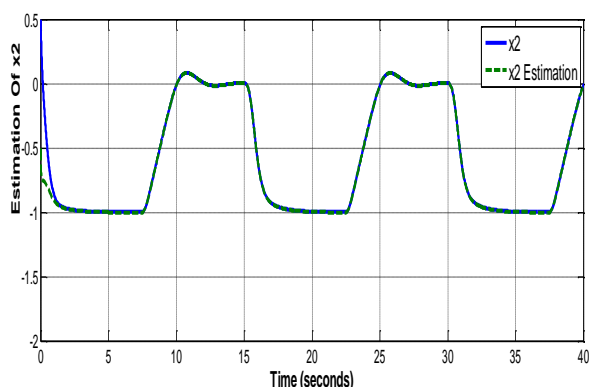
$$(A_i(x) + B_i(x) K_j)^T \tilde{P}_{22} + \tilde{P}_{22} (A_i(x) + B_i(x) K_j) + \frac{1}{\rho^2} \tilde{P}_{22} \tilde{P}_{22} + Q < 0 \quad (۱۵)$$

سپس با استفاده از رابطه (۱۵) پارامترهای \tilde{P}_{22}, K_j را محاسبه کرده و با جایگذاری این پارامترها در رابطه (۱۴)، رابطه بدست آمده به یک نامساوی ماتریس خطی استاندارد تبدیل شده و می توان پارامترهای $\tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{33}, L_i$ را از آن به دست آورد. در نتیجه ضرایب رویترگر و کنترلر محاسبه می شوند.

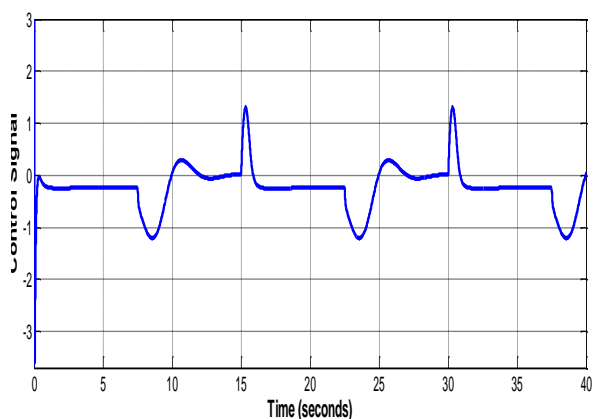
نکته: روش ارائه شده در مرجع [۵] دارای یک ایراد است و آن اینکه ضرایب کنترلر K_j فقط از حل رابطه (۱۵) بدست می آیند. از رابطه (۱۵) روشن است که ضرایب بدست آمده برای کنترلر مستقل از مشخصات تعریف شده برای مدل مرجع است. برای رفع این مشکل در مقاله حاضر اینگونه عمل شده که در صورتیکه ماتریس \tilde{P}_{22} متغیر تصمیم گیری در نظر گرفته نشود رابطه (۱۴) یک مجموع مربعات است و قابل حل خواهد بود. بنابراین \tilde{P}_{22} را بعنوان درجه آزادی و



شکل (۲) تخمین حالت x_1

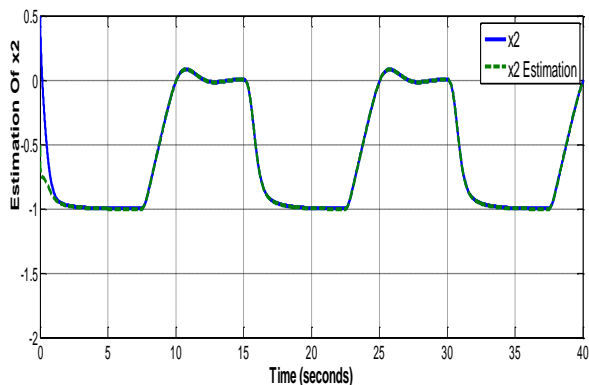


شکل (۳) تخمین حالت x_2

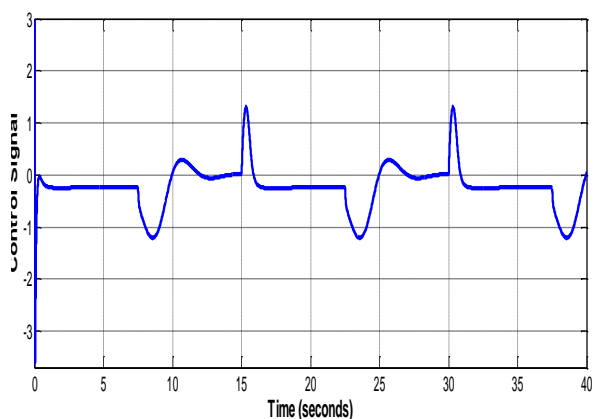


شکل (۴) سیگنال کنترلی

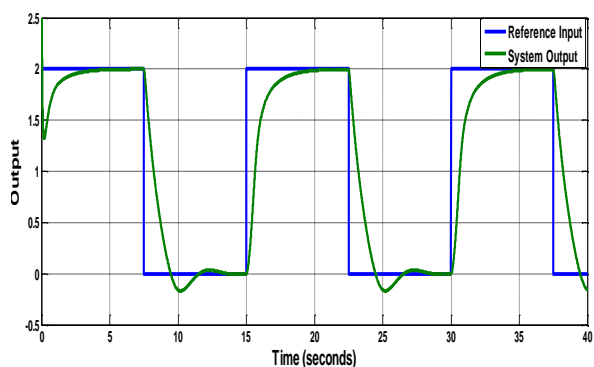
در شکل (۱) رفتار سیستم حلقه بسته را در تعقیب ورودی مرجع پله می توان مشاهده کرد. همانطور که در شکل (۱) دیده می شود، به مدل مرجع، ورودی پالس داده شده و خروجی سیستم به خوبی این ورودی را تعقیب می کند. شکل (۲) و



شکل (۳) تخمین هریک از حالات x_1, x_2 توسط رویترگر را نشان می دهد. ملاحظه می شود که عمل رویت به خوبی انجام شده و با اینکه در شبیه سازی شرایط اولیه سیستم اصلی و رویترگر متفاوت انتخاب شده اند اما بعد از گذشت زمان کوتاهی خطای تخمین حالت از بین رفته است.



شکل (۴) سیگنال کنترلی u که برای کاهش خطای تعقیب به سیستم اعمال می شود را نشان می دهد.



شکل (۱) تعقیب ورودی مرجع توسط خروجی سیستم

۴ مثال شبیه سازی

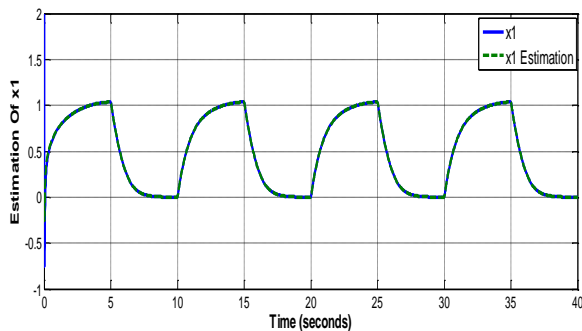
سیستم آشوبناک لورنز را که در مرجع [۱۰] آمده در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) + u(t) \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 \end{cases} \quad (17)$$

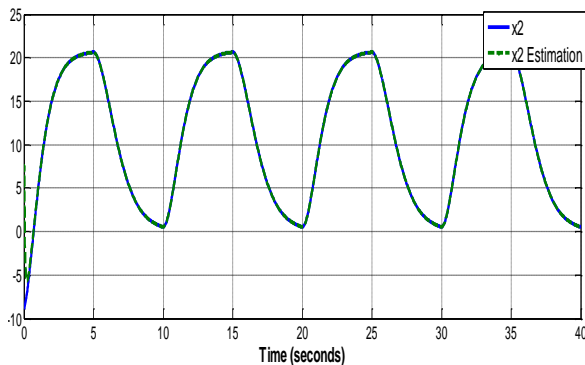
برای سیستم فوق می توان یک مدل فازی TS با دو قاعده به

صورت زیر تعریف کرد

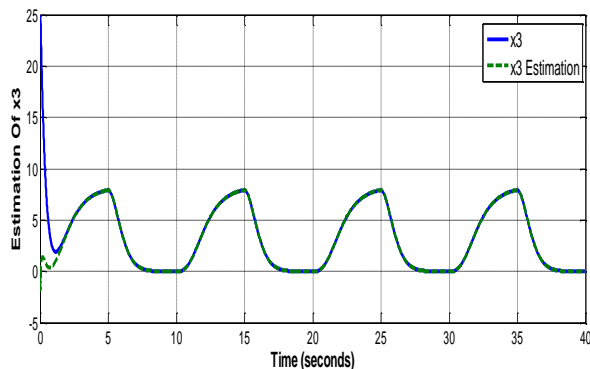
$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -20 \\ 0 & 20 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$



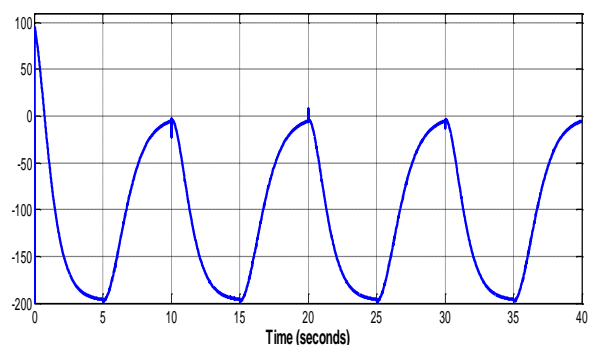
شکل (۶) تخمین حالت x_1



شکل (۷) تخمین حالت x_2



شکل (۸) تخمین حالت x_3



شکل (۹) سیگنال کنترلی

همانطور که ملاحظه می کنید در شکل (۵) خروجی سیستم اصلی به خوبی ورودی پالس مدل مرجع را تعقیب می کند. شکل (۶)، شکل (۷) و شکل (۸) به ترتیب تخمین حالات x_1, x_2, x_3 را توسط رویکرد فازی نشان می دهد. برای نشان دادن کیفیت تخمین، شرایط اولیه

$$A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 20 \\ 0 & -20 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_1 = C_2 = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1}{20} \right)$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{20} \right)$$

مدل مرجع رانیز به صورت زیر در نظر می گیریم

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C_r = [1 \quad 0 \quad 0]$$

سپس با استفاده از جعبه ابزار یالمیپ در متلب، پارامترهای

مسئله را به دست می آوریم

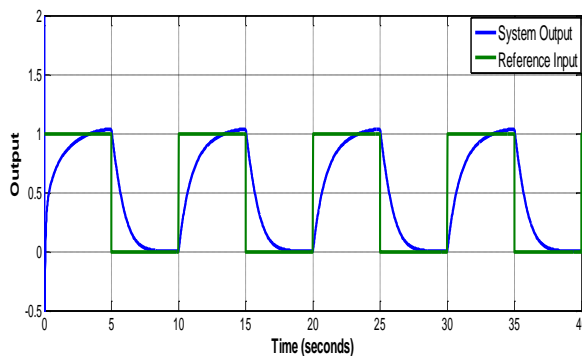
$$\tilde{P}_{11} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.483 & -1.9746 & 0.5047 \\ -1.9746 & 2.7694 & -0.2155 \\ 0.5047 & -0.2155 & 2.2429 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{22} = \begin{bmatrix} 3.3943 & 0.1208 & 0 \\ 0.1208 & 4.0895 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0955 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{33} = 10^6 \begin{bmatrix} 2.8669 & 1.6193 & 0.1084 \\ 1.6193 & 7.367 & 0.8463 \\ 0.1084 & 0.8463 & 0.1519 \end{bmatrix} K_1 = 10^4 [-5.3029 \quad -0.1932 \quad -0.0195]$$

$$K_2 = 10^4 [-4.8553 \quad -0.1773 \quad -0.0178]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 271.1753 \\ 226.9723 \\ -29.5791 \end{bmatrix} L_2 = \begin{bmatrix} 474.1246 \\ 357.0609 \\ -82.2723 \end{bmatrix}$$



شکل (۵) تعقیب ورودی پالس مدل مرجع توسط خروجی سیستم

chaotic system," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 23, pp. 1013-1032, 2004

- [9] K. Tanaka, and Hua O. Wang. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. John Wiley & Sons, 2004.
- [10] X. Huang, Z. Wang, Y. Li, and J. Lu, "Design of fuzzy state feedback controller for robust stabilization of uncertain fractional-order chaotic systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, pp. 5480-5493, 2014

سیستم لورنز [7.5, -9, 27] و شرایط اولیه رویتگر [0,0,0] انتخاب شده است. با توجه به نتایج شبیه سازی می توان دید که از همان لحظه های اولیه، عمل تخمین با دقت بالایی انجام می شود. شکل (۹) سیگنال کنترلی اعمال شده به سیستم را نشان می دهد.

۵ - نتیجه گیری

در این مقاله برای سیستم های فازی چندجمله ای پیوسته قانون کنترلی تعقیب طراحی شد. طراحی قانون کنترل تعقیب بر مبنای طراحی رویتگر فازی چندجمله ای و مدل مرجع انجام شد. شرایط ارائه شده برای تضمین پایداری و کارایی سیستم حلقه بسته بر مبنای معیار کارایی نرم بینهایت و در قالب مجموع مربعات ارائه شد. همانطور که در بخش نتایج شبیه سازی قابل مشاهده است این رویتگر فازی چندجمله ای توانایی تخمین خوبی را برای حالات سیستم از خود نشان می دهد. همچنین تعقیب ورودی مرجع توسط خروجی سیستم که ناشی از اعمال قانون کنترلی طراحی شده بر سیستم است با دقت خوبی صورت می گیرد. به دلیل فرمولاسیون طراحی بر اساس سیستم های فازی چندجمله ای، روش مورد بحث در این مقاله را می توان برای طیف گسترده تری از سیستم های غیر خطی به کار برد.

منابع

- [1] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum-of-Squares Approach to Modeling and Control of Nonlinear Dynamical Systems With Polynomial Fuzzy Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, pp. 911-922, 2009.
- [2] K. Tanaka, H. Ohtake, T. Seo, M. Tanaka, and H. O. Wang, "Polynomial Fuzzy Observer Designs: A Sum-of-Squares Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 42, pp. 1330-1342, 2012.
- [3] C. Guang-hui and W. Jie-chang, "Robust Tracking Control Design for Nonlinear Systems via Fuzzy Observer," *2012 Fifth International Symposium on, Computational Intelligence and Design (ISCID)* pp. 366-369, 2012
- [4] S. Liu, J. Shen, X. Zhou, and L. Pan, "Robust H_∞ tracking controller design for discrete-time affine fuzzy system using fuzzy Lyapunov method," in *Control Conference (CCC), 2015 34th Chinese*, pp. 3607-3612, 2015
- [5] T. Chung-Shi, B.-S. Chen, and U. Huey-Jian, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 381-392, 2001.
- [6] C.-W. Park, C.-H. Lee, and M. Park, "Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty," *Information Sciences*, vol. 147, pp. 245-266, 2002
- [7] C. Li, J. C. Sprott, and W. Thio, "Linearization of the Lorenz system," *Physics Letters A*, vol. 379, pp. 888-893, 2015
- [8] J. Wang, G.-D. Qiao, and B. Deng, "Observer-based robust adaptive variable universe fuzzy control for

^aSector Nonlinearity

^bYalmip