تحلیل ساختارهای کدینگ شبکه برون جریانی

برای شبکه های بی‌سیم خطادار

علیرضا شفیعی نژاد، فرامرز هندسی و مجتبی مهدوی

استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، shafiein@gmail.com
دانشیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، hendessi@cc.iut.ac.ir
استادیار دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه اصفهان، m.mahdavi@eng.ui.ac.ir

چکیده:

ویژگی همه‌پخشی رسانه بی‌سیم باعث افزایش تداخل فرکانسی بین گره های مجاور شده و در نتیجه موجب نرخ گذردهی کمتر در مقایسه با شبکه‌های سیمی می‌شود. یک رویکرد مهم برای بهبود ظرفیت در این شبکه‌ها، کدینگ شبکه برون جریانی است که بسته‌های متعلق به نشستهای متفاوت را با یکدیگر ترکیب کرده و اطلاعات بیشتری را در قالب بسته‌های کد شده در لینکهای گلوگاه شبکه ارسال می‌کند.

در این مقاله کدینگ شبکه با وجود یک MAC غیر ایده‌آل (لینکهای خطادار) مورد توجه قرار گرفته است. هدف از این کار بررسی حساسیت کدینگ به کیفیت ارسال لینک‌هاست. در واقع با اینکه فرآیند کدینگ تعداد ارسالها را کاهش می‌دهد اما به طور شهودی به نظر می‌رسد که حساسیت گره ها را نسبت به گم شدن بسته‌ها افزایش دهد زیرا بسته‌های کد شده‌ی حاوی اطلاعات بیشتری نسبت به بسته‌های معمول هستند. ٠نهع

نتایج ارزیابی نشان می‌دهد که بعضی از ساختارهای کدینگ نظیر آلیس-باب در حالت خطادار بودن شبکه هم از مسیریابی معمول عملکرد بهتری دارند. اما در مورد دیگر ساختارها مشخص شد که کدینگ برای خطای پایین‌تر از 0.1 عملکرد بهتری از مسیریابی دارد و در حالت خطای بالا عملکرد مسیریابی استاندارد بهتر از کدینگ است.

کلمات کلیدی

کدینگ شبکه، ساختارهای کدینگ ، شبکه‌ی بی‌سیم خطادار، مسیریابی و کدینگ

۱ -مقدمه

مفهوم کدینگ شبکه ابتدا در [۱] و برای ترافیک چندپخشی معرفی شد. برای ترافیک تک‌پخشی در کار برجسته‌ی [۲]، الگوریتم کدینگی مبتنی برXOR بسته‌های داده به نام COPE معرفی و پیاده‌سازی شده است. در ادامه تحقیقات سعی شده است که مسیریابی نیز به مسأله‌ی کدینگ شبکه وارد شود. به عنوان مثال در[۳] *مسیریابی تک‌پخشی کدینگ آگاه** پیشنهاد شده است که اشاره به انتخاب مسیرهایی دارد که فرصت‌های کدینگ بیشتری را فراهم می‌آورند. اکثر مسائل بهینه‌سازی کدینگ مبتنی بر یک MAC ایده‌آل بنا شده‌اند. اول اینکه تمامی ارسال‌ها با موفقیت انجام می‌شوند و ثانیاً اینکه زمانبندی برای دسترسی به رسانه به صورت عادلانه انجام می‌گیرد.

در [۴] تحلیلی از میزان بهبود تاخیر شبکه در نتیجه استفاده از کدینگ شبکه برای ارسالهای تک‌پخشی ارائه شده است. به لحاظ بهبود ظرفیت شبکه در [۵] چارچوبی تئوری در قالب یک سیستم خطی برای محاسبه کران بالایی بهبود حاصل از کدینگ شبکه (ساختارهای دو گامی COPE) ارائه شده است. مدل کانال در این دو تحلیل خطادار (packet erasure) فرض شده است.

در این مقاله ، ما مدلی واقعی‌تر برای MAC در نظر گرفته و سعی داریم نشان دهیم که حتی با داشتن یک MAC واقعی نظیر IEEE 802.11 کدینگ شبکه می‌تواند موجب بهبود در نرخ گذردهی شود. در این مدل ارسال‌ها مطمئن فرض نشده‌اند و برای هر لینک خطایی در ارسال نظر گرفته شده است. هدف از این کار بررسی حساسیت کدینگ به کیفیت ارسال لینک‌هاست. در واقع با اینکه فرآیند کدینگ تعداد ارسالها را کاهش می‌دهد اما به طور شهودی به نظر می‌رسد که حساسیت گره ها را نسبت به گم شدن بسته‌ها افزایش دهد زیرا بسته‌های کد شده‌ی حاوی اطلاعات بیشتری نسبت به

---

* Coding-aware routing

بسته‌های معمول هستند. از طرف دیگر در کدینگ مبتنی بر شنود، علاوه برلزوم دریافت بسته‌های کد شده، هر گره نیاز دارد تعدادی از بسته‌های ارسالی همسایگانش را شنود نماید تا قادر به کدگشایی باشد. از اینرو علاوه بر ارسال‌های تک‌پخشی معمول، ارسالهای همه‌پخشی و شنود فرصت‌طلبانه نیز در زمره‌ی ارسالهای نامطمئن قرار گرفته و عدم دریافت بسته از طریق آنها نیز در قالب پارامترهایی مجزا مدلسازی شده اند.

در این نوشتار، تحلیلی بر اساس دو معیار *میزان گم شدن بسته‌ها* و *نرخ گذردهی* در ساختارهای کدینگ انجام شده است. در این تحلیل هر دو کدینگCOPE و ستاره لحاظ شده و کارآیی آنها با مسیریابی معمول مقایسه می‌گردد. انتظاری که از نتایج این تحلیل داریم این است که مشخص کند که کارآیی کدینگ (بر اساس این دو معیار) نسبت به میزان خطا در سیستم چگونه تغییر می‌کند و در چه شرایطی کدینگ عملکرد بهتری ارائه می‌کند.

نوآوریهای این مقاله را میتوان در موارد زیر برشمرد:

۱. تحلیل ساختارهای کدینگ COPE با فرض ارسال و شنود نامطمئن

تعمیم تحلیل به ساختارهای کدینگ ستاره[۶]

۲. انجام تحلیل با و بدون لحاظ کردن مکانیزم بازفرستادن MAC

بنابراین تحلیل ما نسبت به [۵] در این است که اولاً علاوه بر کدینگ COPEکدینگ ستاره نیز لحاظ می‌شود و ثانیاً حالت بدون بازفرستادن را نیز شامل می‌شود.

در این مقاله، در بخش دوم به تحلیل ساختارهایکدینگ بدون در نظر گرفتن مکانیزم بازفرستادن پرداخته شده است. در بخش سوم این تحلیل با لحاظ شدن مکانیزم بازفرستان MAC تکرار می‌شود. بخش چهارم اختصاص به ارزیابی نتایج این تحلیل‌ها دارد. بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری از مقاله پرداخته شدهاست.

۲ -کدینگ شبکه بدون لحاظ مکانیزم بازفرستادن

با اینکه کدینگ شبکه تعداد ارسال‌ها را کاهش می‌دهد اما حساسیت گره ها را به گم شدن بسته‌ها زیاد می‌کند. در واقع هر گاه یک گره بسته‌ای را با موفقیت شنود نکند، قادر به کدگشایی بسته کد شده‌ی شامل آن نخواهد بود. این عدم شنود می‌تواند در ساختارهای ستاره بر کدگشایی دیگر گره ها نیز تأثیر منفی بگذارد. در این بخش سعی داریم تحلیل بهره‌ی کدینگ ساختارهای ستاره و COPE را در حالت لینک خطا دار (کانال‌های غیرایده‌آل) انجام دهیم. فرض شده است که کانال مدل erasure با نرخ گم شدن γ بسته را در هر ارسال دارد. به عبارت دیگر بسته‌ی ارسالی روی هر لینک با احتمال $1-\gamma$ به دست گره بعدی می‌رسد.

۲-۱ -تعاریف، نمادها و فرضیات مدلسازی

از آنجا که در فرآیند کدینگ ستاره علاوه بر دریافت‌های تک‌پخشی، دریافت-هایی نیز به صورت همه‌پخشی و شنود فرصت‌طلبانه وجود دارد، . علاوه بر γ دو پارامتر γ_B و μ نیز در نظر گرفته شده‌اند که به ترتیب احتمال از دست رفتن بسته در جریان دریافت همه‌پخشی و شنود را نشان می‌دهند. ما تحلیل خود را بر اساس دو معیار *متوسط تعداد بسته‌های گم شده* و *متوسط نرخ گذردهی* انجام می‌دهیم. این معیارها در حالت ساده تنها برای شبکه‌ای متشکل از یک ساختار کدینگ COPE یا ستاره انجام شده و با رویکرد بدون کدینگ (مسیریابی معمول) مقایسه شده است.

در این تحلیل‌ها N_L نشان‌دهنده‌ی تعداد بسته‌هایی است که از هنگام ورود به ساختار تا هنگام خروج از آن گم می‌شوند. همچنین T نمایانگر نرخ گذردهی ساختار (بر اساس بسته) است که برابر است با تعداد بسته‌هایی است که در واحد زمان به صورت موفق از ساختار به گره های بیرونی انتقال می‌یابند. برای سادگی فرض شده است که بسته‌ها اندازه‌ای یکسان داشته و انتقال هر بسته به گره بعدی یک واحد زمانی (slot) طول می‌کشد. همچنین n نشان دهنده‌ی تعداد نشست‌های تک‌پخشی است که همدیگر را در یک ساختار کدینگ قطع کرده‌اند. از آنجا که برای هر نشست، یک بسته در نظر می-گیریم، n معرف تعداد بسته‌ها موجود نیز خواهد بود.

در جریان تحلیل نماد $N_{S_1.D_1,S_2.D_2,..S_i.D_i}$ برای نمایش تعداد بسته‌های گم شده در مسیرهای S_1 به D_1، S_2 به D_2 تا S_i به D_i به کار می‌رود. همچنین $\bar{N}_{S_1.S_2,..,S_i}$ نشان‌دهنده‌ی تعداد بسته‌هایی است که شنودشان توسط گره های S_1 تا S_i ناموفق بوده است. با این نمادگذاری احتمال اینکه برابری متغیر تصادفی N_L با یک مقدار مشخص را می‌توان بر اساس یک مجموعه از رویدادهای دوبه دو ناسازگار بیان کرد. این رویدادها با متغیرهای تصادفی $N_{S_1.D_1,S_2.D_2,..S_i.D_i}$ و $\bar{N}_{S_1.S_2,..,S_i}$ قابل بیان هستند.

۲-۲ -تحلیل مسیریابی معمول

در مسیریابی استاندارد هر بسته مسیری شامل چندین گام (hop) را طی می-کند. فرض کنید بسته‌ای نظیرP_1 مسیری شامل m گام را می‌پیماید. اگر γ_m نشان‌دهنده‌ی نرخ گم شدن P_1 در این مسیر باشد، داریم:

$$\gamma_m = 1-(1-\gamma)^m \quad (۱)$$

۲-۲-۱ -مسیرهای شامل ۲ گام

در این حالت هر بسته از هر نشست می‌بایست مسیری به طول دو گام را طی کند. بنابراین بسته‌ی P_i می‌تواند در ارسال از طرف گره ورودی یا گره میانی گم شود. بنابراین :

$$P(P_i\ is\ lost) = \gamma_2 \qquad 1 \le i \le n \quad (۲)$$

با در نظر گرفتن تمامی نشست‌ها و احتمال گم شدن بسته‌ی مربوط به هر کدام از آنها، N_L متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای $B(n,\gamma_2)$ خواهد داشت. در نتیجه:

$$P(N_L = i) = \binom{n}{i}{\gamma_2}^i(1-\gamma_2)^{n-i} \quad (۳)$$

بنابراین متوسط N_L نیز از روش زیر به دست خواهد آمد:

$$E(N_L) = \sum_{i=1}^{n} P(P_i\ is\ lost)\times 1 = n\gamma_2 \quad (۴)$$

نرخ گذردهی ساختار نیز با توجه به الگوریتم زمانبندیMAC مشخص می-شود. از آنجا که تمامی لینک‌های ساختار در حوزه‌ی تداخل یکدیگر هستند بنابراین ارسال موفق هر n بسته به بیرون از ساختار $2n$ واحد زمانی طول می‌کشد. در حالتی که بسته‌هایی در مرحله‌ی اول ارسال (از گره ورودی به گره میانی) گم می‌شوند این زمان کاهش می‌یابد. بنابراین کافی است برای محاسبه‌ی نرخ گذردهی، همه‌ی رویدادهای گم شدن در گام اول یا دوم را در نظر بگیریم. فرض کنید N_{L_1} و N_{L_2} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تعداد بسته‌هایی باشند که در ارسالهای انجام شده از گره های ورودی و گره های مرکزی گم می‌شوند.

با در نظر گرفتن همه‌ی حالات ممکن، برای این دو متغیر، می‌توان نوشت:

$$E(T)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}P\left(N_{L_1}=i,N_{L_1}=j\right).E\left(T\middle|N_{L_1}=i,N_{L_1}=j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\gamma^i(1-\gamma)^{n-i}.\binom{n-i}{j}\gamma^j(1-\gamma)^{n-i-j}.\frac{n-i-j}{2n-i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\gamma^{i+j}(1-\gamma)^{2n-2i-j}.\frac{n-i-j}{2n-i} \qquad (۵)$$

۲ ۲ ۴ -مسیرهای شامل ۳ گام

به روش مشابه، می‌توانیم محاسبات مربوط به مسیریابی n نشست تک‌پخشی سه گامی را تکرار کنیم. در هر یک از مسیرها، بسته‌ی P_i می‌تواند در ارسال از طرف گره ورودی، گره میانی یا گره خروجی گم شود. بنابراین :

$$P(P_i\ is\ lost)=\gamma_3 \qquad 1\le i\le 3 \qquad (۶)$$

با در نظر گرفتن تمامی نشست‌ها ، N_L متغیری تصادفی با توزیع دوجمله‌ای $B(n,\gamma_3)$ خواهد داشت. در نتیجه:

$$P(N_L=i)=\binom{3}{i}{\gamma_3}^i(1-\gamma_3)^{3-i}$$

متوسط N_L نیز از روش زیر به دست خواهد آمد:

$$E(N_L)=\sum_{i=1}^{n}P(P_i\ is\ lost)\times 1=n\gamma_3 \qquad (۷)$$

نرخ گذردهی ساختار نیز با توجه به الگوریتم زمانبندیMAC مشخص می‌شود. با فرض آنکه تمامی لینک‌های ساختار در حوزه‌ی تداخل یکدیگر هستند بنابراین ارسال موفق هر n بسته به بیرون از ساختار، نیاز به $3n$ واحد زمانی خواهد داشت. در حالتی که بسته‌هایی گم می‌شوند این زمان کاهش می‌یابد. فرض کنید N_{L_1}، N_{L_2} و N_{L_3} به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تعداد بسته‌هایی باشند که در ارسالهای انجام گرفته از گره های ورودی، گره مرکزی و گره های خروجی گم می‌شوند. بنابراین کافی است برای محاسبه‌ی نرخ گذردهی همه‌ی رویدادهای گم شدن را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$E(T)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}P\left(N_{L_1}=i,N_{L_2}=j,N_{L_3}=k\right).E\left(T\middle|N_{L_1}=i,N_{L_2}=j,N_{L_3}=k\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{i}\gamma^i(1-\gamma)^{n-i}.\binom{n-i}{j}\gamma^j(1-\gamma)^{n-i-j}.\binom{n-i-j}{k}\gamma^k(1-\gamma)^{n-i-j-k}.\frac{n-i-j-k}{3n-2i-j} \qquad (۸)$$

بنابراین:

$$E(T)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{k=0}^{n-i-j}\frac{n!}{i!j!k!(n-i-j-k)!}\gamma^{i+j+k}(1-\gamma)^{3n-3i-2j-k}.\frac{n-i-j-k}{3n-2i-j} \qquad (۹)$$

۲ ۳ -تأثیر دریافت‌های ناموفق در حالت مسیریابی همراه با کدینگ

۲ ۳ ۱ -تحلیل ساختار آلیس-باب از کدینگ COPE

توپولوژی آلیس-باب (شکل ۱-ب) همانند دیگر ساختارهای COPE، کدینگی دو مرحله‌ای است. گره های ورودی بسته‌های خود را بدون هیچ‌گونه تغییری به گره مرکزی ساختار ارسال می‌کنند. گره مرکزی نیز فرصت کدینگ را تشخیص داده ،تصمیم به کدکردن بسته‌های دو نشست گرفته و بسته‌ی حاصل را به صورت همه‌پخشی به گره های خروجی می‌فرستد. از آنجا که سناریوی کدینگ تعویض بسته‌هاست، هر کدام از گره های خروجی در صورت دریافت صحیح بسته‌ی کد شده، بسته‌ی خود را به سادگی بازیابی خواهند نمود. در مجموع دو دریافت تک‌پخشی و دو دریافت همه‌پخشی در ساختار وجود دارد. در صورت عدم دریافت ارسالهای تک‌پخشی توسط گره مرکزی فرصت کدینگ از دست می‌رود. همچنین عدم دریافت ارسال همه‌پخشی در یک گره خروجی، کدگشایی را ناممکن می‌کند. براساس وضعیت هرکدام از این دریافت‌ها، الگوریتم کدینگ وضعیتی متفاوت خواهد داشت.

این حالات در شش رویداد دو بدو ناسازگار مطابق جدول ۱ قابل بیان هستند. هر کدام از رویدادها (e_1 تا e_6) بر اساس متغیرهای تصادفی $N_{S_1.M,S_2.M}$ و $N_{M.D_1,M.D_2}$ قابل بیان هستند.

به عنوان مثال e_1 به رویدادی اشاره دارد که همه دریافت‌ها با موفقیت همراه هستند. همچنین e_2 متناظر با حالتی است که گره مرکزی ارسالهای تک-پخشی را دریافت کرده و بسته‌ی کد شده را تولید و به صورت همه‌پخشی ارسال کرده است. اما تنها یکی از گره ها این بسته را دریافت کرده است. رویداد e_3 به حالتی اشاره دارد که گره مرکزی تنها یکی از ارسالهای تک-پخشی را با موفقیت گرفته است، ازاینرو قادر به کدگذاری نبوده و بسته‌ی دریافتی را به صورت کد نشده به گره بعدی می‌رساند. در واقع فرصت کدینگ از دست می‌رود و بسته‌ی باقی مانده بر اساس مسیریابی معمول عبور داده می‌شود. احتمال هر رویداد بر اساس پارامترهایγ و γ_B بیان شده است. با این اوصاف می‌توانیم متوسط N_L را به صورت زیر محاسبه کنیم:

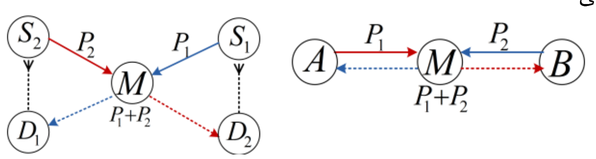
$$E(N_L)=\sum_{i=0}^{2}i.P(N_L=i)=\sum_{i=2}^{3}P(e_i)+2\sum_{i=4}^{6}P(e_i) \qquad (۱۰)$$

همچنین برای نرخ گذردهی ساختار می‌توان نوشت:

$$E(T)=\sum_{1}^{3}e_i.E(T|e_i)=(1-\gamma)^2.(1-\gamma_B)^2\frac{2}{3}+(1-\gamma)^2.2\gamma_B(1-\gamma_B)\frac{1}{3}+2\gamma(1-\gamma).(1-\gamma)\frac{1}{3} \qquad (۱۱)$$

۲ ۳ ۲ -تحلیل توپولوژی X از کدینگ COPE

توپولوژی X (شکل ۲-ب) از ساختارهای COPE، کدینگی دو مرحله‌ای و مبتنی بر شنود است. گره های ورودی بسته‌های خود را بدون هیچ‌گونه تغییری به گره مرکزی ساختار ارسال می‌کنند. گره مرکزی نیز فرصت کدینگ را تشخیص داده ، تصمیم به کد کردن بسته‌های دو نشست گرفته و بسته‌ی حاصل را به صورت همه‌پخشی به گره های خروجی می‌فرستد. گره های خروجی نیز با استفاده از بسته‌های شنود شده بسته‌ی مورد نظر خود را بازیابی می‌کنند.



شکل ۱) ساختارهای مورد تحلیل کدینگ COPE

بنابراین علاوه بر دریافت صحیح ارسالهای تک‌پخشی و همه‌پخشی، لازم است گره های خروجی بسته‌های ارسالی گره های ورودی را با موفقیت شنود کنند تا کدگشایی میسر باشد. بر اساس وضعیت ارسالهای تک‌پخشی و همه-

پخشی و شنود شش حالت متمایز قابل تشخیص است که در قالب شش رویداد e_1 تا e_6 در جدول ۲ آورده شده‌اند. این رویدادها که همانند قبل دو به دو ناسازگار هستند، بر اساس متغیرهای تصادفی نظیر $N_{S_1.M,S_2.M}$، $N_{M.D_1,M.D_2}$ و $\bar{\bar{N}}_{D_1.D_2}$ بیان شده‌اند.

به عنوان مثال e_1 به رویدادی اشاره دارد که همه دریافت‌ها و شنودها با موفقیت همراه هستند. دقت کنید که کدگشایی و بازیابی بسته‌ی مورد نظر در هر کدام از گره های خروجی نیازمند دریافت ارسال همه‌پخشی و شنود موفق ارسال گره ورودی مقابل است. بنابراین احتمال کدگشایی برابر با $(1-\gamma_B)(1-\mu)$ است. از آنجا که این مقدار در بقیه‌ی احتمالات نیز حضور دارد آنرا با متغیر x_D نشان دادیم. عدم کدگشایی می‌تواند در نتیجه عدم شنود یا عدم دریافت بسته‌ی کد شده باشد. ملاحظه کنید که احتمال تمامی رویدادها بر اساس پارامترهای γ، γ_B و x_D قابل بیان است. هم‌اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم متوسط N_L را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$E(N_L) = \sum_{i=0}^{2} i.P(N_L = i) = \sum_{i=2}^{3} P(e_i) + 2\sum_{i=4}^{6} P(e_i) \quad (۱۲)$$

نیز می‌توانیم نرخ گذردهی ساختار را به روش زیر محاسبه کنیم:

$$E(T) = \sum_{1}^{3} e_i \, . E(T|e_i) = \frac{2}{3}(1-\gamma)^2.{x_D}^2 + \frac{1}{3}(1(1-\gamma)^2.2x_D(1-x_D) + \frac{1}{3}2\gamma(1-\gamma)^2 \quad (۱۳)$$

۲ ۳ ۳ -تحلیل کدینگ ستاره جزئی با اندازه‌ی ۲

کدینگ ستاره‌ی جزئی (شکل ۲–الف) شباهت زیادی به توپولوژی X از کدینگ COPE دارد با این تفادت که D_2 به جای شنود از S_1 از D_1 شنود می‌کند. همانند قبل وضیعت دریافت‌های تک‌پخشی، همه‌پخشی و شنودها شش حالت متمایز را معرفی می‌کند که در قالب شش رویداد e_1 تا e_6 درجدول ۳ آورده شده‌اند. با دقت در این جدول در می‌یابیم که احتمال دو رویداد e_2 و e_4 نسبت به احتمال رویدادهای متناظر در توپولوژی X تفاوت دارد. این تفاوت از تغییر الگوی شنود D_2 ناشی می‌شود.

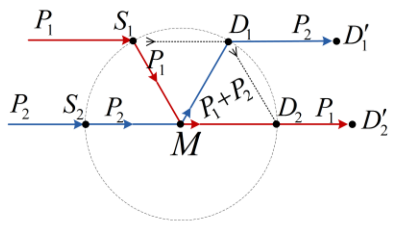
رویداد e_2 به حالتی اشاره دارد که بعد از ارسال بسته‌ی کد شده توسط گره مرکزی کدگشایی D_1 موفق ولی D_2 ناموفق است که احتمالی برابر با $x_D(1-x_D)$ خواهد داشت. رویداد e_4 نیز متناظر با حالتی است که بعد از ارسال بسته‌ی کد شده از گره مرکزی D_1 قادر به کدگشایی بسته‌ی کد شده و بازیابی بسته‌ی P_2 نیست و متعاقب آن نیز D_2 قادر به کدگشایی بسته‌ی خود نخواهد بود. احتمال این رویداد در صورت ارسال بسته‌ی کد شده برابر با $(1-x_D)$ می‌باشد. به عبارت دیگر کدگشایی D_2 وابستگی مستقیمی به کدگشایی D_1 دارد.

با توجه به رویدادهای تعریف شده، متوسط N_L را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

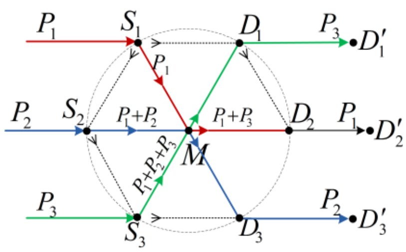
$$E(N_L) = \sum_{i=0}^{2} i.P(N_L = i) = \sum_{i=2}^{3} P(e_i) + 2\sum_{i=4}^{6} P(e_i) \quad (۱۴)$$

همچین برای نرخ گذردهی ساختار داریم:

$$E(T) = \sum_{i=1}^{3} P(e_i)\,.E(T|e_i) = (1-\gamma)^2.{x_D}^2\frac{2}{3} + (1-\gamma)^2.x_D(1-x_D)\frac{1}{3} + 2\gamma(1-\gamma)^2\frac{1}{3} \quad (۱۵)$$



الف) کدینگ ستاره‌ی جزئی با اندازه‌ی ۲



ب)کدینگ ستاره‌ی کامل با اندازه‌ی ۳ وجایگشت هدف (3,1,2)

شکل ۲) ساختارهای مورد تحلیل کدینگ ستاره

۲ ۳ ۴ -تحلیل کدینگ ستاره کامل با اندازه‌ی ۳

تحلیل ساختار ستاره‌ی کامل با توجه به تنوع شنودها و تعداد دریافت‌هایی همه‌پخشی و تک‌پخشی پیچیده‌تر است. در واقع این پیچیدگی از افزایش تعداد حالتهای ممکن در وضعیت دریافت‌ها ناشی می‌شود. در این بخش ساختار کدینگ شکل ۲–ب،که یکی از سه حالت موجود کدینگ ستاره‌ی کامل با اندازه‌ی ۳ است، مورد تحلیل قرار گرفته است. همانگونه که در قبل گفته شد، این ساختار محل برخورد سه نشست تک پخشی است که قرار است بسته‌های P_1، P_2 و P_3 را به ترتیب به گره های $\acute{D}_3$، $\acute{D}_1$ و $\acute{D}_2$ برساند. الگوریتم کدینگ در مجموع شامل یک ارسال همه‌پخشی، شش ارسال تک-پخشی و پنج شنود است. در صورتیکه هر کدام از این دریافت‌ها با موفقیت همراه نباشند، تعدادی از گره ها قادر به کدگشایی بسته‌ی کدشده و بازیابی بسته‌ی خود نخواهند بود. به عنوان مثال اگر بسته‌ی کد شده‌ی P_1+P_3 توسط D_1 و D_3 دریافت شود ولی D_2 آنرا دریافت نکند آنگاه D_1 و D_3 در صورت شنود بسته‌های لازم قادر به کدگشایی و بازیابی بسته‌ی خود خواهند بود ولی برای D_2 چنین امری اتفاق نمی‌افتد. فرض شده است که الگوریتم کدینگ به نوعی از عدم ارسال صحیح بسته‌ها آگاهی می‌یابد. بنابراین با گم شدن یک بسته، سعی می‌کند که پردازش مربوط به کدینگ را متوقف و مابقی بسته‌ها را از طریق مسیریابی معمول به گره های بعدی برساند.

محاسبات با تعریف مجموعه‌ای شامل ۳۰ رویداد نظیر e_1 و e_2 که در جدول ۴تعریف شده‌اند، به سر انجام می‌رسد. بر این اساس، متوسط N_L برابر خواهد بود با:

$$E(N_L) = \sum_{i=0}^{3} i.P(N_L = i) = \sum_{i=3}^{7} P(e_i) + 2\sum_{i=8}^{16} P(e_i) + 3\sum_{i=17}^{30} P(e_i) \quad (۱۶)$$

۳ -کدینگ با لحاظ کردن مکانیزم بازفرستادن

تحلیل مکانیزم بازفرستادن از نظر پهنای باند مصرفی

استاندارد IEEE 802.11 در حالت ارسال تک‌پخشی مکانیزم تأیید (ACK) را دارد[۷] که در صورتی گره گیرنده بسته را به صورت صحیح دریافت نکند، فرستنده (در نتیجه عدم دریافت تأیید) بسته را مجدداً ارسال می‌کند. دقت داشته باشید که ارسال همه‌پخشی فاقد این مکانیزم است زیرا گره گیرنده یکتا نیست که پیغام ACK را به فرستنده بدهد. همین ویژگی برای دریافت از طریق شنود نیز برقرار است زیرا نودی که در شنود یک بسته با خطا مواجه شود نمی‌تواند درخواست بازفرستادن بسته را به فرستنده بدهد. به طور خلاصه در ارسال تک پخشی گیرنده کنترل مکانیزم بازفرستادن بسته را در اختیار دارد. با لحاظ کردن مکانیزم بازفرستادن می‌توان فرض کرد که ارسال‌های تک‌پخشی همیشه به مقصد می‌رسند منتها با این تفاوت که پهنای باند مصرفی در حالت غیرایده‌ال از ترافیک ارسالی بیشتر خواهد بود. به عبارت دیگر پهنای باند متناسب با کاهش کیفیت لینک افزایش می‌یابد.

فرض کنید احتمال ارسال موفق روی یک لینک خاص برابر با p باشد، آنگاه متغیر تصادفیX که تعداد ارسال‌های لازم برای دریافت موفق را نشان می-دهد متغیری با توزیع هندسی خواهد بود. بنابراین متوسط تعداد ارسال‌ها برابر است با:

$$E(X)=\sum_{i=1} i.p(1-p)^{i-1}=\frac{1}{p} \quad (۱۷)$$

به عبارت دیگر برای ارسال یک بسته پهنای باندی به اندازه‌ی $\frac{1}{p}$ برابر حجم بسته مصرف خواهد شد. دقت کنید که از پهنای باندی که برای ارسال بسته-های کنترلی ACK مصرف می‌شود، صرفنظر شده است.

برای ارسال همه‌پخشی نیز مکانیزم بازفرستاندن را می‌توان در نظر گرفت. این مکانیزم اولین بار در COPE در قالب *شبه‌همه‌پخشی*[†] پیشنهاد شده است. در نظر بگیرید که گره A می‌خواهد بسته‌ای را به دو گره B و C به صورت همه‌پخشی ارسال کند. احتمال ارسال موفق روی لینکهای (A,B) و (A,C) را به ترتیب p_1 وp_2 فرض کنید. فرض کنید مکانیزم بازفرستادن نیز لحاظ شده است به این معنی که گره A در صورت عدم دریافت تأیید از هر یک از گره های B و C، بسته را مجدداً ارسال می‌کند. فرض کنید متغیر تصادفی $X_{B,C}$نشان‌دهنده‌ی تعداد ارسالهای لازم برای دریافت موفق بسته از طرف B و C باشد. برای احتمال $X_{B,C}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}P(X_{B,C}=i)&=P(\max(X_B,X_C)=i)\\&=P(X_B=i|X_C<i)\\&+P(X_C=i|X_B<i)\\&+P(X_B=X_C=i)=p_1(1-p_1)^{i-1}\\&+p_2(1-p_2)^{i-1}-(p_1+p_2\\&-p_1p_2)(1-p_1)^{i-1}(1-p_2)^{i-1}\end{aligned} \quad (۱۸)$$

بنابراین برای متغیر تصادفی $X_{B,C}$ می‌توان برابری زیر را نوشت:

$$X_{B,C}=X_B+X_C-X_{\overline{BC}} \quad (۱۹)$$

که $X_{\overline{BC}}$ توزیع هندسی با احتمال $1-(1-p_1)(1-p_2)$ دارد. در نتیجه برای متوسط تعداد ارسال‌های لازم، $E(X_{B,C})$ ،می‌توان نوشت[۸]:

[†] Pseudue broadcast

$$E(X_{B,C})=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \quad (۲۰)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که متوسط تعداد ارسال همه‌پخشی به n گره A_1، A_2 ، .. وA_n که به ترتیب احتمال دریافتی برابر p_1،p_2، .. و p_n دارند برابر است با :

$$E(X_{A_1,A_2,..,A_n})=\sum_{m=1}^{n}\sum_{1\le i_1<i_2<..<i_m\le n}\frac{(-1)^{m+1}}{1-\prod_{k=1}^{m}(1-p_{i_k})} \quad (۲۱)$$

جهت سادگی در تحلیل، تابع N_{Bcast} را به صورت متوسط تعداد ارسالهای لازم برای همه‌پخشی یک بسته به n به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_{Bcast}(p_1,p_2,..,p_n)=E(X_{A_1,A_2,..,A_n}) \quad (۲۲)$$

تحلیل ساختارهای کدینگ

برای مسیریابی معمول در یک ساختار دوگامی می‌بایست ۴ ارسال موفق صورت گیرد بنابراین تعداد ارسالهای لازم برای کانال با خطای γ برابر است با :

$$N_{route-2hop}=4N_{Ucast}(\gamma)=\frac{4}{1-\gamma} \quad (۲۳)$$

برای ساختار آلیس–باب، دو ارسال تک‌پخشی و یک ارسال همه‌پخشی موفق لازم است. بنابراین میتوان نوشت:

$$\begin{aligned}N_{COPE-AB}&=2N_{Ucast}(\gamma)+N_{Bcast}(\gamma,\gamma)\\&=\frac{4}{1-\gamma}-\frac{1}{1-\gamma^2}\end{aligned} \quad (۲۴)$$

برای توپولوژی Xاز کدینگ COPE دو ارسال تک‌پخشی همراه با شنود لازم است. یعنی علاوه بر رسیدن بسته به نود مرکزی، شنود آن نیز میبایست توسط نود متناظر انجام گیرد. با فرض اینکه نود شنود کننده موفقیت یا عدم موفقیت در شنود را به گونه‌ای به فرستنده منعکس کند (به عنوان مثال از طریق مکانیزم Reception Report در COPE)، می‌توان این ارسال را نیز معادل یک همه‌پخشی با دو گیرنده در نظر گرفت. بنابراین :

$$\begin{aligned}N_{COPE-X}&=2N_{Bcast}(\gamma,\mu)+N_{Bcast}(\gamma,\gamma)\\&=\frac{4}{1-\gamma}+\frac{2}{1-\mu}-\frac{1}{1-\gamma^2}\\&-\frac{2}{1-\mu\gamma}\end{aligned} \quad (۲۵)$$

که μ نرخ عدم شنود موفق یک بسته می‌باشد.

برای ساختار ستاره‌ی جزئی دو گامی، نیز دو ارسال تک‌پخشی همراه شنود، یک ارسال همه‌پخشی به علاوه یک ارسال تک‌پخشی دیگر در نود خروجی که می‌بایست توسط نود D_2 شنود شود نیاز است. بنابراین:

$$\begin{aligned}N_{Star-2}&=2N_{Bcast}(\gamma,\mu)+N_{Bcast}(\gamma,\gamma)\\&+(N_{Bcast}(\gamma,\mu)-N_{Ucast}(\gamma))\\&=\frac{4}{1-\gamma}+\frac{3}{1-\mu}-\frac{1}{1-\gamma^2}\\&-\frac{3}{1-\mu\gamma}\end{aligned} \quad (۲۶)$$

برای ساختار ستاره کامل ۳ گامی نیاز به یک ارسال تک‌پخشی با دو شنود (S_1)، سه ارسال تک‌پخشی با یک شنود (S_2، S_3 و D_1)، یک همه‌پخشی با سه‌گیرنده (M) و دو ارسال تک‌پخشی (D_3وD_2) نیاز است. بنابراین:

$$\begin{aligned} N_{Star-3} &= N_{Bcast}(\gamma,\mu,\mu) + N_{Bcast}(\gamma,\gamma,\gamma) \\ &+ 3N_{Bcast}(\gamma,\mu) \\ &+ 2N_{Ucast}(\gamma) \\ &= \frac{9}{1-\gamma} + \frac{5}{1-\mu} - \frac{5}{1-\gamma\mu} \\ &- \frac{1}{1-\mu^2} - \frac{3}{1-\gamma^2} \\ &+ \frac{1}{1-\gamma\mu^2} + \frac{1}{1-\gamma^3} \end{aligned} \tag{۲۷}$$

این در حالیست که مسیریابی معمول در این ساختار به ۹ ارسال تک‌پخشی نیاز دارد. از اینرو:

$$N_{route-3hop} = 9N_{Ucast}(\gamma) = \frac{9}{1-\gamma} \tag{۲۸}$$

۴ ارزیابی

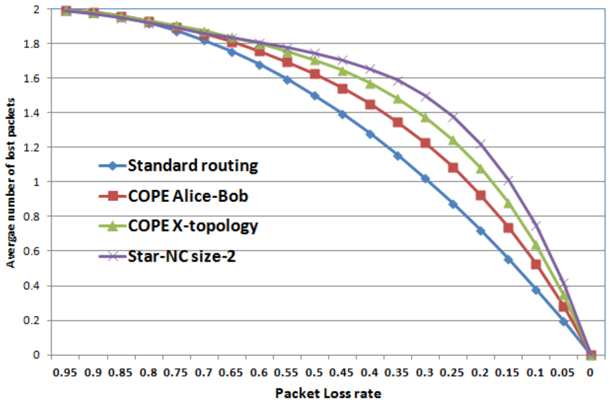
کدینگ بدون مکانیزم بازفرستادن

در تحلیل‌های انجام گرفته مسیریابی معمول تنها به پارامتر γ وابستگی دارد. در حالیکه با بهره‌گیری از فرصتهای کدینگ و در نتیجه امکان تولید ترافیک همه‌پخشی پارامتر γ_B نیز در محاسبات وارد می‌شود. همچنین در ساختارهای کدینگ مبتنی بر شنود. پارامتر μ نیزدر نتایج تحلیل پدیدار می‌شود. در این بخش سعی شده است که کارآیی هر یک از الگوریتم‌های کدینگ در مقایسه با مسیریابی استاندارد به ازای مقادیر مختلف γ، μ و γ_B بررسی شود.

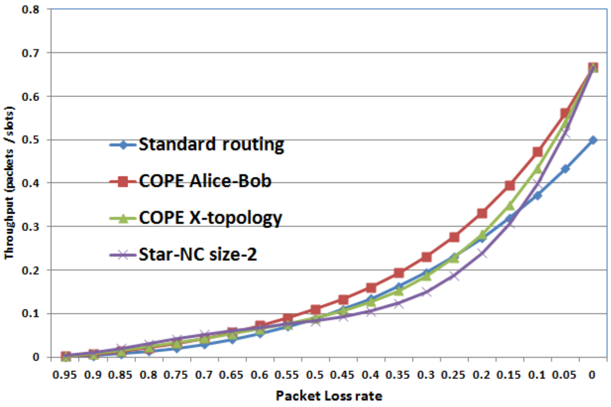
برای ارائه‌ی یک مقایسه کمّی فرض کرده‌ایم که μ و γ_B برابر با γ باشند. با این فرض، نتایج برای ساختارهای آلیس–باب و X از کدینگ COPE و ستاره جزئی در شکل ۳ و بر اساس تغییرات $0 \leq \gamma \leq 0.95$ نشان شده است. مشاهده می‌شود که متوسط بسته‌های مفقودی در حالت کدینگ بیشتر از مسیریابی معمول است. در بین ساختارهای کدینگ نیز این متوسط برای ساختار آلیس–باب کمترین و ساختار ستاره‌ی جزئی دوگامی بیشترین مقدار است و ساختار X بین این دو قرار می‌گیرد. به طور خلاصه می‌توان گفت با افزایش تعداد همه‌پخشی و شنودها، متوسط میزان گم شدن بسته‌ها اضافه می‌شود.

در مقابل در شکل شکل ۳–ب مشاهده می‌شود که نرخ گذردهی در حالت کدینگ با توجه به نوع ساختار و مقدار خطا نسبت به مسیریابی می‌تواند بهبود داشته باشد. اولین نتیجه این است که ساختار آلیس–باب به ازای هر مقدار خطا نرخ‌گذردهی بیشتری از مسیریابی و سایر ساختارهای کدینگ استاندارد دارد.

این در حالیست که توپولوژی X به ازای خطای $0.25 \leq \gamma \leq 0.45$ و ساختار ستاره‌جزئی به ازای خطای $0.15 \leq \gamma \leq 0.5$عملکردی ضعیف‌تر از مسیریابی استاندارد به لحاظ نرخ گذردهی دارند. اگراز خطاهای نرخ بالاتر از 0.5 صرف‌نظرکنیم می‌توانیم بگوییم که کارآیی ساختار توپولوژی X برای $\gamma < 0.25$ و ساختار ستاره جزئی برای $\gamma < 0.15$ عملکردی بهتر از مسیریابی معمول بهتر می‌شود. تفاوت بین این دو ساختار را می‌توان ناشی از تفاوت تعداد شنودهای موفق آنها دانست. در حالیکه توپولوژی X نیاز به دو شنود موفق دارد، این تعداد در ساختار ستاره‌ی جزئی به عدد سه می‌رسد.



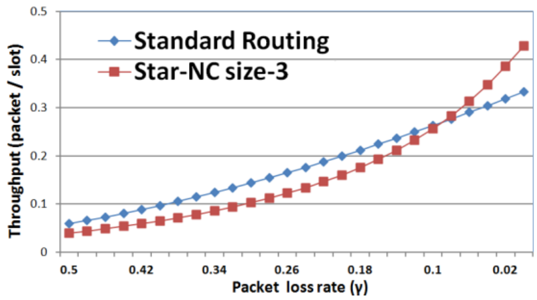
الف– متوسط تعدا بسته‌های گمشده



ب– نرخ گذردهی بر اساس تعداد بسته در واحد زمان

شکل ۳) مقایسه ساختار های کدینگ دو گامی با مسیریابی استاندارد

وضعیت برای ساختار ستاره کامل که تعداد شنودهای بیشتری دارد، از ساختارهای دو گامی بدتر است. با مراجعه به نتایج شکل ۴ درمی‌یابیم که که حساسیت ساختار ستاره کامل نسبت به کیفیت دریافتها از تمامی ساختارهای قبلی بیشتر است به گونه‌ای که برای کانال خطادار با $\gamma \geq 0.1$ عملکرد مسیریابی معمول بهتر از کدینگ است. در واقع تعداد بالای شنودها (۵ عدد) و همچنین تعداددریافت‌کنندگان ترافیک همه‌پخشی (۳ گره) موجب افت کارآیی در حالت ارسال با خطا شده است. با اینحال می بینیم که با افزایش کیفیت ارسالها، تفاوت عملکرد بین مسیریابی و کدینگ کمتر می‌شود و نهایتاً در نقطه‌ی $\gamma = 0.09$ کدینگ ستاره از مسیریابی استاندارد پیشی می‌گیرد.



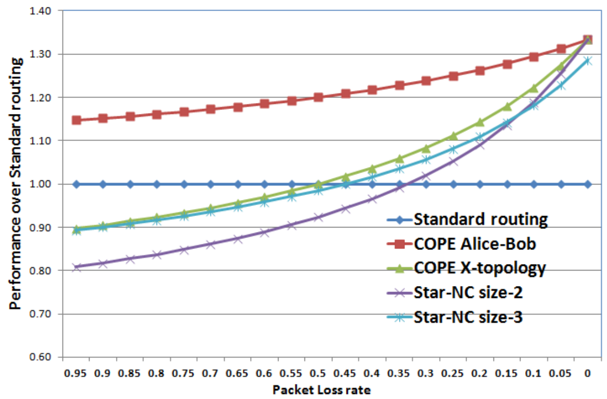
شکل ۴) نرخ گذردهی کدینگ ستاره‌ی کامل ۳ گامی با مسیریابی استاندارد

نکته‌ی قابل توجه در تحلیل‌های انجام شده این است که، در تمامی ساختارها ، متوسط بسته‌های گم شده در طی فرآیند کدینگ از مسیریابی استاندارد بیشتر است. این امر پیش‌تر به طور شهودی نیز قابل حدس بود زیرا عدم دریافت بسته‌ی کد شده یا بسته‌ی شنودی علاوه بر اینکه گره مورد نظر را از کدگشایی و بازیابی بسته‌ی دلخواه وامی‌دارد، باعث می‌شود گره های وابسته نیز نتوانند فرآیند کدگشایی را با موفقیت طی کنند. اما به لحاظ نرخ گذردهی، حالت کدینگ به خاطر کاهش تعداد کلی ارسال‌ها نرخ گذردهی بهتری (برای مقادیر مناسب γ بسته به ساختار) نسبت به مسیریابی استاندارد ارائه می‌کند.

کدینگ با مکانیزم بازفرستادن

با لحاظ مکانیزم بازفرستادن MAC بسته‌ها همیشه به مقصد می‌رسند با این تفاوت که بسته به میزان خطا تعداد ارسالها اضافه می‌شوند یا به عبارت دیگر پهنای باند بیشتری بررای ارسال لازم می‌شود.

برای مقایسه دقیق‌تر، نتایج به صورت نرمال شده نسبت به مسیریابی استاندارد در شکل ۵ نشان شده است. همانند بخش قبل مشاهده می‌شود که کدینگ آلیس-باب در هر حالت از مسیریابی استاندارد عملکرد بهتری دارد. با این تفاوت که کارآیی آن برای خطای بالا حدود ۱۵٪ و برای خطای پایین نزدیک به ۳۳٪ است. سایرساختارهای کدینگ برای خطای بالا عملکرد ضعیف‌تری نسبت به مسیریابی دارند. به بیان دقیق‌تر، توپولوژی X کدینگ COPE برای خطای $\gamma < 0.5$، کدینگ ستاره جزئی برای خطای $\gamma < 0.35$ و کدینگ ستاره کامل برای خطای $\gamma < 0.45$ عملکرد بهتری نسبت به مسیریابی استاندارد دارند. ساختارهای کدینگ دوگامی برای کانال ایده‌آل ۳۳٪ و کدینگ سه‌گامی ۲۹٪ بهتر از مسیریابی عمل می‌کنند. به عنوان یک نتیجه کلی، برای خطای $\gamma < 0.1$ تمامی ساختارهای کدینگ بهبود بالای ۲۰٪ را ارائه می‌کنند.



شکل ۵- کارآیی کدینگ ساختارهای کدینگ نسبت به مسیریابی استاندارد

۵ -خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیلی برای ساختارهای کدینگ COPE و ستاره در حالت ارسال نامطمئن ارائه شد. این تحلیل برای دو حالت با و بدون لحاظ شدن مکانیزم بازفرستادن MAC انجام گرفت. نتایج هر دو تحلیل حاکی از این است که کدینگ آلیس-باب با هر کیفیت کانالی عملکرد بهتری به لحاظ نرخ گذردهی ایجاد می‌کند. سایرساختارهای کدینگ برای اینکه عملکرد بهتری نسبت به مسیریابی داشته باشند، می‌بایست بسته به نوع ساختار خطای کانالی کمتر از ۰,۵ تا ۰,۱ داشته باشند.

دقت کنید که در این مقاله تمرکز تنها بر شبکه‌ای متشکل از یک ساختار کدینگ بود. تحلیل شبکه‌ای متشکل از چندین ساختار کدینگ نیاز به چارچوب تئوری جامع‌تری دارد که ما آنرا به عنوان یک کار مستقل انجام داده و به همین کنفرانس ارائه کرده‌ایم.

۶ -مراجع

[1] Ahlswede, R., Cai, N., Li, S. Y., & Yeung, R. W.,"Network information flow." Information Theory, IEEE Transactions on 46, no. 4 (2000): 1204-1216. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 1, pp 1204-1216, 2000.

[2] Katti, S., Rahul, H., Hu, W., Katabi, D., Médard, M., & Crowcroft, J. ,"XORs in the air: practical wireless network coding.", *ACM SIGCOMM 2006*, September 2006. *IEEE/ACM Trans.Networking*, vol. 16, pp. 497-510, June 2008.

[3] Sengupta, S., Rayanchu, S. and Banerjee, S., "An analysis of wireless network coding for unicast sessions: The case for coding-aware routing." In *INFOCOM 2007. 26th IEEE International Conference on Computer Communications*. pp. 1028-1036.

[4] Dikaliotis, Theodoros K., et al. "On the delay advantage of coding in packet erasure networks." *Information Theory, IEEE Transactions on* 60.5 (2014): 2868-2883.

[5] Khreishah, Abdallah, et al. "Flow-based xor network coding for lossy wireless networks." *Wireless Communications, IEEE Transactions on* 11.6 (2012): 2321-2329.

[6] Shafieinejad, A., Hendessi, F. and Fekri, F., “Star-Structure Network Coding for Multiple Unicast Sessions in Wireless Mesh Networks,” *Springer Wireless personal communications*, Vol.72, 2013, No.4, 2185-2214.

[7]http://standards.ieee.org/getieee802/download/802.11-2007.pdf, [13] IEEE 802.11: *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*. (2007 revision). IEEE-SA. 12 June 2007.

[8]Nguyen, Dong, et al. "Wireless broadcast using network coding." *Vehicular Technology, IEEE Transactions on* 58.2 (2009): 914-925.

[9]. Zhang, H. Su and X., “Modeling Throughput Gain of Network Coding in Multi-Channel Multi-Radio Wireless Ad Hoc Networks”,. *5, June 2009, International Journal of Selected Area in Communications*, Vol. 27.

[10]Wang, Chih-Chun. "On the capacity of wireless 1-hop intersession network coding—a broadcast packet erasure channel approach." *Information Theory, IEEE Transactions on* 58.2 (2012): 957-988.

[11]. Ghaderi, Majid, Don Towsley, and Jim Kurose. "Reliability gain of network coding in lossy wireless networks." *INFOCOM 2008. The 27th Conference on Computer Communications*, 2008.

جدول ۱) رویدادهای دو به دو ناسازگار در ساختار کدینگ آلیس-باب

N_L	event	Conditions	Probability
0	$\boldsymbol{e_1}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{M.D_1,M.D_2} = 0$	$(1-\gamma)^2.(1-\gamma_B)^2$
1	$\boldsymbol{e_2}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{M.D_1,M.D_2} = 1$	$(1-\gamma)^2.2\gamma_B(1-\gamma_B)$
	$\boldsymbol{e_3}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 0$	$2\gamma(1-\gamma).(1-\gamma)$
2	$\boldsymbol{e_4}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{M.D_1,M.D_2} = 2$	$(1-\gamma)^2.{\gamma_B}^2$
	e_5	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 1$	$2\gamma(1-\gamma).\gamma$
	$\boldsymbol{e_6}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2$	γ^2

جدول ۲) رویدادهای دو به دو ناسازگار در توپولوژی X ازکدینگ COPE (با فرض $(x_D = (1-\gamma_B)(1-\mu)$.

N_L	event	Conditions	Probability
0	$\boldsymbol{e_1}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{D_1.D_2} = N_{M.D_1,M.D_2} = 0$	$(1-\gamma)^2.{x_D}^2$
1	$\boldsymbol{e_2}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, (\overleftarrow{N}_{D_1} + N_{M.D_1} = 0 \cup \overleftarrow{N}_{D_2} + N_{M.D_2} = 0) \cap \overleftarrow{N}_{D_1.D_2} + N_{M.D_1,M.D_2} \neq 0$	$(1-\gamma)^2.2x_D(1-x_D)$
	$\boldsymbol{e_3}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 1$	$2\gamma(1-\gamma).(1-\gamma)$
2	$\boldsymbol{e_4}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{D_1} + N_{M.D_1} \neq 0 \cap \overleftarrow{N}_{D_2} + N_{M.D_2} \neq 0$	$(1-\gamma)^2.(1-x_D)^2$
	e_5	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 2$	$2\gamma(1-\gamma).\gamma$
	$\boldsymbol{e_6}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2$	γ^2

جدول ۳) رویدادهای مجزا در کدینگ ستاره‌ی جزئی با اندازه‌ی ۲

N_L	event	Conditions	Probability
0	$\boldsymbol{e_1}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{D_1.D_2} = N_{M.D_1,M.D_2} = 0$	$(1-\gamma)^2.{x_D}^2$
1	$\boldsymbol{e_2}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{D_1} + N_{M.D_1} = 0, \overleftarrow{N}_{D_2} + N_{M.D_2} \neq 0$	$(1-\gamma)^2.x_D(1-x_D)$
	$\boldsymbol{e_3}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 1$	$2\gamma(1-\gamma).(1-\gamma)$
2	$\boldsymbol{e_4}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{D_1} + N_{M.D_1} \neq 0$	$(1-\gamma)^2.(1-x_D)$
	e_5	$N_{S_1.M,S_2.M} = 1, N_{M.D_1,M.D_2} = 1$	$2\gamma(1-\gamma).\gamma$
	$\boldsymbol{e_6}$	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2$	γ^2

جدول ۴) رویدادهای دو به دو مجزا برای مقادیر مختلف N_L با فرض

N_L	event	Conditions	probability
0	$\boldsymbol{e_1}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 0$	$(1-\gamma)^3.(1-\mu)^2.(1-x_T)^3$
	$\boldsymbol{e_2}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 0$	$(1-\gamma)^3.\mu_2.(1-\gamma)^2(1-x_T)^2$
1	$\boldsymbol{e_3}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 1$	$(1-\gamma)^3.(1-\mu)^2.2x_T(1-x_T)^2$
	$\boldsymbol{e_4}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{,M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 1$	$(1-\gamma)^3.\mu_2.[x_T(1-x_T)(1-\gamma)^2 + (1-x_T)^2\gamma_2]$
	e_5	$N_{S_1.M} = 1, N_{S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 1, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 0$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu.(1-\gamma)^4$
	$\boldsymbol{e_6}$	$N_{S_1.M,S_3.M} = 0, N_{S_2.M} = 1, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2} = 0$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu_2.(1-x_T)^2$
	e_7	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{S_3.M} = 1, N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 0$	$\gamma(1-\gamma)^2.\ (1-\gamma)^4$
2	$\boldsymbol{e_8}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_1} = 1 \cup N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 2$	$(1-\gamma)^3.(1-\mu)^2.[x_T(1-x_T) + {x_T}^2(1-x_T)]$
	$\boldsymbol{e_9}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1} = 1 \cup N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 2$	$(1-\gamma)^3.\mu_2.[x_T(1-\gamma)^2 + x_T(1-x_T)\gamma_2]$
	e_{10}	$N_{S_1.M} = 1, N_{S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 1, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 1$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu.2\gamma_2(1-\gamma_2)$
	$\boldsymbol{e_{11}}$	$N_{S_1.M,S_3.M} = 0, N_{S_2.M} = 1, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2} = 1$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu_2.(1-x_T)x_T$
	e_{12}	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{S_3.M} = 1, N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 1$	$\gamma(1-\gamma)^2.\ 2\gamma_2(1-\gamma_2)$
	e_{13}	$N_{S_1.M} = 1, N_{S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 0$	$\gamma(1-\gamma)^2.(1-\mu).(1-\gamma_2)$
	e_{14}	$N_{S_1.M,S_3.M} = 0, N_{S_2.M} = 1, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2} = 0$	$\gamma(1-\gamma)^2.(1-\mu_2).(1-\gamma_2)$
	e_{15}	$N_{S_1.M} = 0, N_{S_2.M,S_3.M} = 2, N_{M.\acute{D}_2} = 0$	$(1-\gamma)\gamma^2.(1-\gamma_2)$
	e_{16}	$N_{S_1.M,S_3.M} = 2, N_{S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 1, N_{M.\acute{D}_3} = 0$	$(1-\gamma)\gamma^2.\mu.(1-\gamma_2)$
	e_{17}	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2, N_{S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1} = 0$	$(1-\gamma)\gamma^2.\mu_2.(1-\gamma_2)$
3	$\boldsymbol{e_{18}}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 2$	$(1-\gamma)^3.(1-\mu)^2.{x_T}^2$
	$\boldsymbol{e_{19}}$	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 2$	$(1-\gamma)^3.\mu_2.\gamma_2.x_T$
	e_{20}	$N_{S_1.M} = 1, N_{S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 1, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 2$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu.{\gamma_2}^2$
	$\boldsymbol{e_{21}}$	$N_{S_1.M,S_3.M} = 0, N_{S_2.M} = 1, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2} = 2$	$\gamma(1-\gamma)^2.\mu_2.x_T$
	e_{22}	$N_{S_1.M,S_2.M} = 0, N_{S_3.M} = 1, N_{M.\acute{D}_2,M.\acute{D}_3} = 2$	$\gamma(1-\gamma)^2.\ {\gamma_2}^2$
	e_{23}	$N_{S_1.M} = 1, N_{S_2.M,S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_3} = 1$	$\gamma(1-\gamma)^2.(1-\mu).\gamma_2$
	e_{24}	$N_{S_1.M,S_3.M} = 0, N_{S_2.M} = 1, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0, N_{M.\acute{D}_1,M.\acute{D}_2} = 1$	$\gamma(1-\gamma)^2.(1-\mu_2).\gamma_2$
	e_{25}	$N_{S_1.M} = 0, N_{S_2.M,S_3.M} = 2, N_{M.\acute{D}_2} = 1$	$(1-\gamma)\gamma^2.\gamma_2$
	e_{26}	$N_{S_1.M,S_3.M} = 2, N_{S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 1, N_{M.\acute{D}_3} = 1$	$(1-\gamma)\gamma^2.\mu.\gamma_2$
	e_{27}	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2, N_{S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} \neq 0, N_{M.\acute{D}_1} = 1$	$(1-\gamma)\gamma^2.\ \mu_2.\gamma_2$
	e_{28}	$N_{S_1.M,S_3.M} = 2, N_{S_2.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2} = 0$	$(1-\gamma)\gamma^2.(1-\mu)$
	e_{29}	$N_{S_1.M,S_2.M} = 2, N_{S_3.M} = 0, \overleftarrow{N}_{S_2.S_3} = 0$	$(1-\gamma)\gamma^2.(1-\mu_2)$
	e_{30}	$N_{S_1.M,S_2.M,S_3.M} = 3$	γ^3